

VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta strojní

Katedra aplikované mechaniky

Dynamická analýza a pevnostní kontrola pout'ové atrakce

Dynamic Analysis and Strength
Calculation of the Fairground Amusement

Student:

Bc. Marek Týn

Vedoucí diplomové práce:

doc. Ing. Jiří Podešva, Ph.D.

Ostrava 2020

Zadání diplomové práce

Student:

Bc. Marek Týn

Studijní program:

N2301 Strojní inženýrství

Studijní obor:

3901T003 Aplikovaná mechanika

Téma:

Dynamická analýza a pevnostní kontrola pouťové atrakce
Dynamic Analysis and Strength Calculation of the Fairground
Amusement

Jazyk vypracování:

čeština

Zásady pro vypracování:

1. Popis konstrukce
2. Kinematický a dynamický rozbor
3. Řešení silových účinků
4. Pevnostní kontrola
5. Vyhodnocení a závěr

Seznam doporučené odborné literatury:

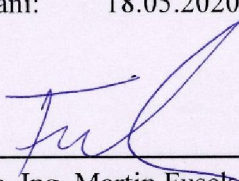
- [1] Brousil, J., Slavík, J., Zeman, V. : Dynamika. SNTL, Praha, 1989.
- [2] Juliš, K., Brepta, R. : Mechanika II. díl, dynamika. SNTL, Praha, 1987.
- [3] Brát V. : Maticové metody v analýze a syntéze prostorových vázaných mechanických systémů. Academia, Praha 1981
- [4] Vinogradov O. : Fundamentals of Kinematics and Dynamics of Machines and Mechanisms. CRC Press,

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.


Vedoucí diplomové práce: **doc. Ing. Jiří Podešva, Ph.D.**

Datum zadání: 20.12.2019

Datum odevzdání: 18.05.2020

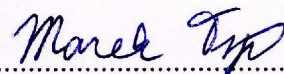

doc. Ing. Martin Fusek, Ph.D.
vedoucí katedry




prof. Ing. Ivo Hlavatý, Ph.D.
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem celou diplomovou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě dne 18.5.2020

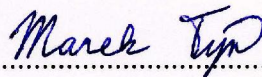


.....
podpis studenta

Prohlašuji, že:

- jsem si vědom, že na tuto moji závěrečnou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. Zákon o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (dále jen Autorský zákon), zejména § 35 (Užití díla v rámci občanských či náboženských obřadů nebo v rámci úředních akcí pořádaných orgány veřejné správy, v rámci školních představení a užití díla školního) a § 60 (Školní dílo),
- беру на вѣдомі, же Высoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen „VŠB-TUO“) má právo užít tuto závěrečnou diplomovou práci nekomerčně ke své vnitřní potřebě (§ 35 odst. 3 Autorského zákona),
- bude-li požadováno, jeden výtisk této diplomové práce bude uložen u vedoucího práce,
- s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 Autorského zákona,
- užít toto své dílo, nebo poskytnout licenci k jejímu využití, mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše),
- беру на вѣдомі, же – podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů – že tato diplomová práce bude před obhajobou zveřejněna na pracovišti vedoucího práce, a v elektronické podobě uložena a po obhajobě zveřejněna v Ústřední knihovně VŠB-TUO, a to bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě dne 18.5.2020


.....

podpis studenta

Jméno a příjmení autora práce:

Bc. Marek Týn

Adresa trvalého pobytu autora práce:

Zelená 32, Ostrava 702 00

ANOTACE DIPLOMOVÉ PRÁCE

TÝN, M. *Dynamická analýza a pevnostní kontrola pouťové atrakce: diplomová práce*. Ostrava: VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra aplikované mechaniky, 2020, 52 s. Vedoucí práce: Podešva, J.

Diplomová práce se zabývá analýzou sférického pohybu pouťové atrakce a pevnostní kontrolou její nosné konstrukce. V úvodu je popsána daná problematika a jsou vytyčeny cíle práce. Následují teoretické poznatky a odvození vztahů z oblasti kinematiky a dynamiky sférického pohybu. Tyto vztahy jsou poté uplatněny na konkrétní případ atrakce a s využitím zadaných parametrů, čímž se získají průběhy kinematických veličin a setrvačných účinků v závislosti na poloze závěsu. Dalším bodem je vytvoření geometrického a výpočtového modelu nosné konstrukce a její pevnostní kontrola, která určí, zdali konstrukce vyhovuje požadavkům a jestli při provozu nedojde k jejímu poškození.

ANNOTATION OF MASTER THESIS

TÝN, M. *Dynamic Analysis and Strength Calculation of the Fairground Amusement: Master Thesis*. Ostrava: VŠB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Applied Mechanics, 2020, 52 p. Thesis head: Podešva, J.

Master thesis is dealing with the analysis of spherical motion of a fairground amusement and with strength calculation of its load-bearing construction. The introduction describes the topic and goals of this thesis. Then, the theory and equations from kinematics and dynamics of spherical motion are defined. After that, these equations are applied for this specific case, which takes given parameters into consideration, from which is gained the course of kinematics quantities and inertial loads depending on the position of the swaying part. Next step is creating geometric and finite element method model of the load-bearing construction and its strength calculation that decides if the construction meets the required criteria and if it will not be damaged during its operation.

Obsah

1	Úvod	9
1.1	Popis problematiky	9
1.2	Stanovené cíle práce	10
2	Teoretické poznatky	11
2.1	Kinematika sférického pohybu	11
2.2	Dynamika sférického pohybu	16
3	Parametry atrakce	18
3.1	Délkové parametry	18
3.2	Hmotové parametry	18
3.3	Dopočítané parametry	19
4	Kinematický rozbor	21
4.1	Precese	21
4.2	Nutace	24
4.3	Vlastní rotace	24
4.4	Celkové kinematické veličiny	25
5	Dynamický rozbor	28
5.1	Setrvačné účinky na nosnou konstrukci	28
5.2	Setrvačné účinky v přírubě rotoru závěsu	30
6	Pevnostní kontrola	32
6.1	Metoda konečných prvků	32
6.2	Materiál nosné konstrukce	34
6.3	Geometrický model	35
6.4	Výpočtový model	37
6.5	Svislá poloha závěsu	39
6.5.1	Napětí při svislé poloze závěsu	41
6.5.2	Deformace při svislé poloze závěsu	43
6.6	Vodorovná poloha závěsu	43
6.6.1	Napětí při vodorovné poloze závěsu	45
6.6.2	Deformace při vodorovné poloze závěsu	48
	Vyhodnocení a závěr	49
	Seznam zdrojů	52

Seznam použitých značek a symbolů

Značka	Jednotka	Název
\mathbf{a}	$[\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$	zrychlení
a_x, a_y, a_z	$[\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$	složky zrychlení v pevném souř. systému
a_ξ, a_η, a_ζ	$[\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$	složky zrychlení v tělesovém souř. systému
D	$[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$	deviační moment
\mathbf{D}	$[\text{N}]$	vektor setrvačných sil
\mathbf{e}	$[-]$	jednotkový vektor ve směru uzlové přímky
E	$[\text{MPa}]$	modul pružnosti v tahu
E_k	$[\text{J}]$	kinetická energie
E_T	$[\text{MPa}]$	tečný modul
f_ψ	$[\text{Hz}]$	frekvence precesního pohybu
F_o	$[\text{N}]$	osová síla
F_p	$[\text{N}]$	příčná síla
g	$[\text{m} \cdot \text{s}^{-2}]$	tíhové zrychlení
G	$[\text{N}]$	tíhová síla
G	$[\text{MPa}]$	modul pružnosti ve smyku
\mathbf{H}	$[\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}]$	hybnost
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	$[-]$	jednotkové vektory pevného souř. systému
$\mathbf{i}_t, \mathbf{j}_t, \mathbf{k}_t$	$[-]$	jednotkové vektory tělesového souř. systému
I_x, I_y, I_z	$[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$	momenty setrvačnosti k osám pevného souř. systému
I_ξ, I_η, I_ζ	$[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$	momenty setrvačnosti k osám tělesového souř. systému
\mathbf{J}	$[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$	matice setrvačnosti
\mathbf{L}	$[\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}]$	moment hybnosti
O	$[-]$	střed sférického pohybu
m	$[\text{kg}]$	hmotnost
\mathbf{M}_D	$[\text{N} \cdot \text{m}]$	vektor setrvačných momentů
M_o	$[\text{N} \cdot \text{m}]$	ohybový moment
n_φ	$[\text{min}^{-1}]$	otáčky vlastní rotace
r	$[\text{m}]$	poloměr
\mathbf{r}	$[\text{m}]$	polohový vektor
R_e	$[\text{MPa}]$	mez kluzu
R_m	$[\text{MPa}]$	mez pevnosti
t	$[-]$	čas
T_ψ	$[\text{s}]$	perioda precesního pohybu

u	$[-]$	uzlová přímka
v	$[m \cdot s^{-1}]$	obvodová rychlost
v_x, v_y, v_z	$[m \cdot s^{-1}]$	složky obvodové rychlosti v pevném souř. systému
v_ξ, v_η, v_ζ	$[m \cdot s^{-1}]$	složky obvodové rychlosti v tělesovém souř. systému
x, y, z	$[-]$	osy pevného souř. systému
ε	$[s^{-2}]$	úhlové zrychlení
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	$[s^{-2}]$	složky úhlového zrychlení v pevném souř. systému
$\varepsilon_\xi, \varepsilon_\eta, \varepsilon_\zeta$	$[s^{-2}]$	složky úhlového zrychlení v tělesovém souř. systému
ξ, η, ζ	$[-]$	osy tělesového souř. systému
ϑ	$[^\circ]$	úhel nutace
μ	$[-]$	Poissonovo číslo
π	$[-]$	Ludolfovo číslo
ρ	$[m]$	vzdálenost od středu sférického pohybu
ρ	$[kg \cdot m^{-3}]$	hustota
σ	$[MPa]$	napětí
φ	$[^\circ]$	úhel vlastní rotace
ψ	$[^\circ]$	úhel precese
ψ_a	$[^\circ]$	amplituda kývání závěsu
ω	$[s^{-1}]$	úhlová rychlost
$\omega_x, \omega_y, \omega_z$	$[s^{-1}]$	složky úhlové rychlosti v pevném souř. systému
$\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$	$[s^{-1}]$	složky úhlové rychlosti v tělesovém souř. systému
Ω_ψ	$[s^{-1}]$	kruhová frekvence precesního pohybu

1 Úvod

1.1 Popis problematiky

Cílem diplomové práce je zkoumat dynamické silové působení při provozu pouťové atrakce Extreme a pevnostní kontrola nosné konstrukce při tomto zatížení. Rotor sedaček této atrakce vykonává sférický pohyb o dvou stupních volnosti.

Konstrukce zábavní atrakce se skládá ze dvou hlavních částí, a to nosné konstrukce a závěsu se sedačkami pro 16 osob. Nosná konstrukce je tvořena „čtyřnožkou“, která je uložena na podvozku. Ten je pomocí hydrauliky pevně usazen na zemi. Na vrcholu čtyřnožky je hlavice uchycená v držácích, jejíž vodorovná osa je osou kývání závěsu neboli precese sférického pohybu. Kývání probíhá až do úhlu 120° na obě strany. Závěs tvoří pevná část připojená k hlavici a rotor se čtyřmi gondolami, na kterých jsou umístěné sedačky. Rotor koná rovnoměrnou vlastní rotaci okolo osy závěsu. Nutace se při pohybu neuskutečňuje. Celou atrakci lze vidět na ilustračním fotu na Obr. 1.



Obr. 1 – Pouťová atrakce Extreme ⁴

Do provozu je atrakce uvedena pomocí hnacího momentu, po dosažení maximálního výkmitu však tento moment slouží pouze jako vyrovnání odporů proti pohybu, nebude se proto s ním v této práci počítat.

Hmotové a délkové parametry atrakce včetně tvarů a rozměrů nosné konstrukce byly inspirovány skutečnou atrakcí, konkrétní hodnoty byly však pozměněny. Výsledky tedy nemusí přesně odpovídat skutečnosti, měly by se ji ale blížit.

1.2 Stanovené cíle práce

Práce začíná rozбором teorie z problematiky kinematiky a dynamiky obecného sférického pohybu, kde se nejprve definuje pevný a tělesový souřadný systém a úhly, pomocí kterých dochází k jejich transformaci. Následuje odvození Eulerových kinematických rovnic, které tvoří základní kámen kinematiky sférického pohybu a také Eulerových pohybových rovnic, zastupujících dynamiku.

Prvním cílem práce je kinematická analýza sférického pohybu, kde budou pro daný případ konkretizovány teoretické poznatky. Výsledkem je určení průběhů úhlových rychlostí, úhlových zrychlení, obvodových rychlostí i okamžitého zrychlení v závislosti na úhlu precese, resp. v závislosti na čase. Veličiny, které nejsou úhlové, budou vyjádřeny pro těžiště celého závěsu, popř. pro těžiště rotoru závěsu.

Dalším důležitým bodem je určení setrvačných účinků, které vychází z hmotových parametrů a tvoří hlavní část zatížení konstrukce atrakce. Opět se vypracují průběhy těchto sil v závislosti na okamžité poloze závěsu s uvažováním tíhové síly působící na závěs a vlastní tíhy konstrukce.

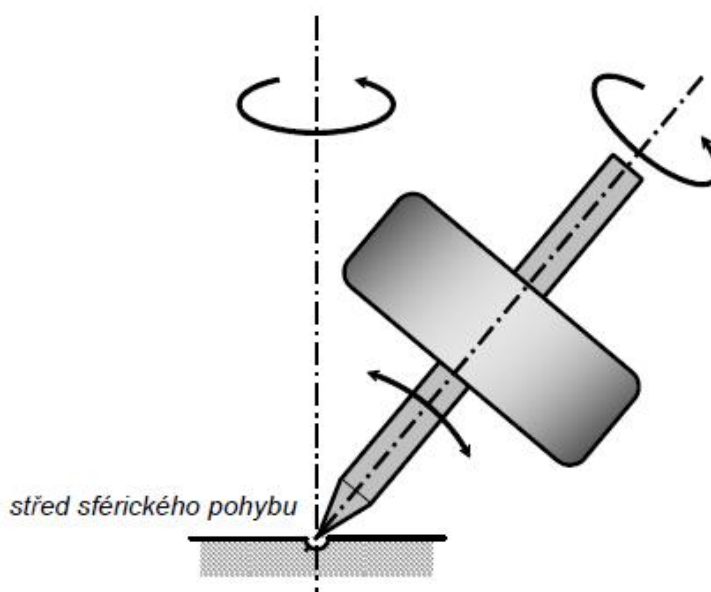
Pevnostní kontrola nosné konstrukce bude realizována pomocí komerčního software Ansys Workbench 19.2, který využívá diskrétní metody konečných prvků MKP neboli FEM (z angl. Finite Element Method), která geometrický model atrakce převádí na model s konečným počtem prvků (elementů). Výstupem je zobrazení napětí a deformací na nosné konstrukci ve vybraných polohách závěsu a posouzení, zdali tato konstrukce vyhovuje požadavkům na pevnost.

2 Teoretické poznatky

Pro posouzení kinematiky a dynamiky daného problému je třeba porozumět základním poznatkům a pojmům z problematiky sférického pohybu.

2.1 Kinematika sférického pohybu

Sférický pohyb těleso vykonává tehdy, pokud jeden jeho bod O (střed sférického pohybu) je trvale v klidu. Těleso v prostoru má 6 stupňů volnosti, zamezením všech 3 posuvů v jednom bodě se 3 stupně volnosti odeberou. Těleso poté může konat pouze 3 nezávislé rotace. Body tělesa mají při svém pohybu konstantní vzdálenost od středu O a jejich trajektorií jsou tzv. sférické křivky (křivky ležící na kulových plochách se středem O).



Obr. 2 – Znázornění rotací sférického pohybu ⁵

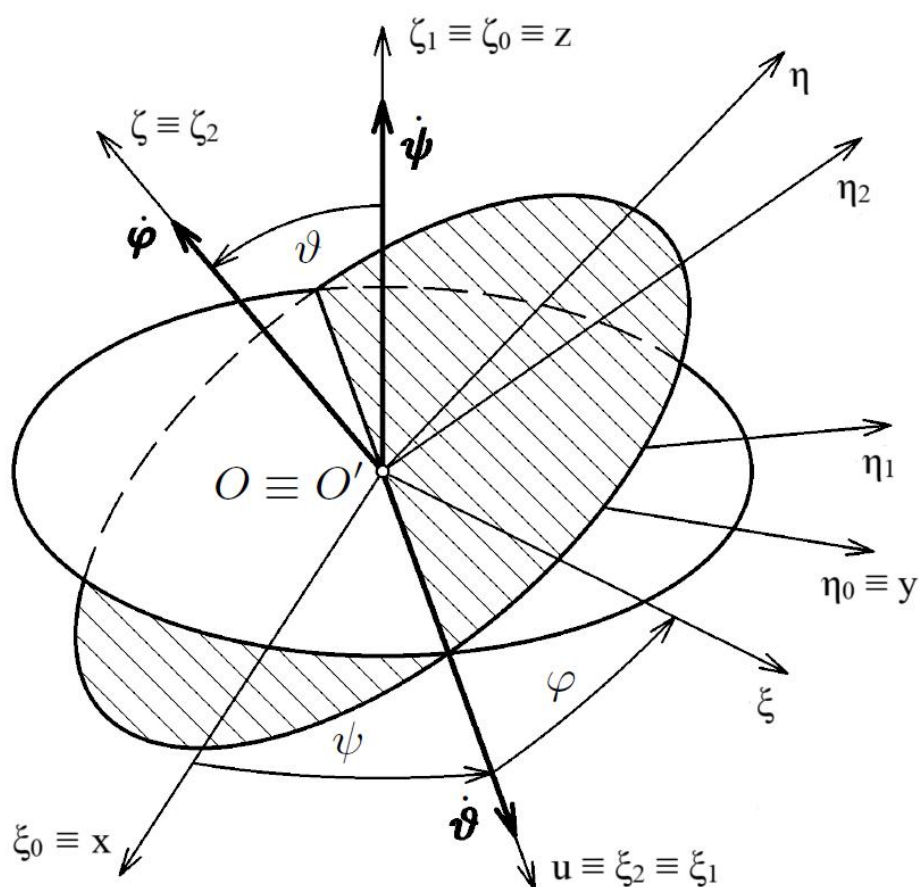
Kinematika sférického pohybu je popisována veličinami úhlová rychlost ω a úhlové zrychlení ϵ . Při pohybu se velikost i směr těchto vektorů mění, zachovává se pouze to, že jejich nositelky prochází středem sférického pohybu. V daném okamžiku lze určit okamžitou osu rotace, která je určena vektorem okamžité úhlové rychlosti.

Prostor, ve kterém těleso koná sférický pohyb, může být popsán buď pomocí pevného nebo tělesového souřadného systému. Osy pevného souřadného systému x , y a z (základní prostor) své polohy nemění. Počátek tohoto souřadného systému se nachází ve středu sférického pohybu.

Tělesový souřadný systém, respektive jeho osy ξ , η a ζ , je pevně spojen s tělesem a vzniká postupným natáčením o tzv. Eulerovy úhly. Tyto úhly udávají polohu tělesa

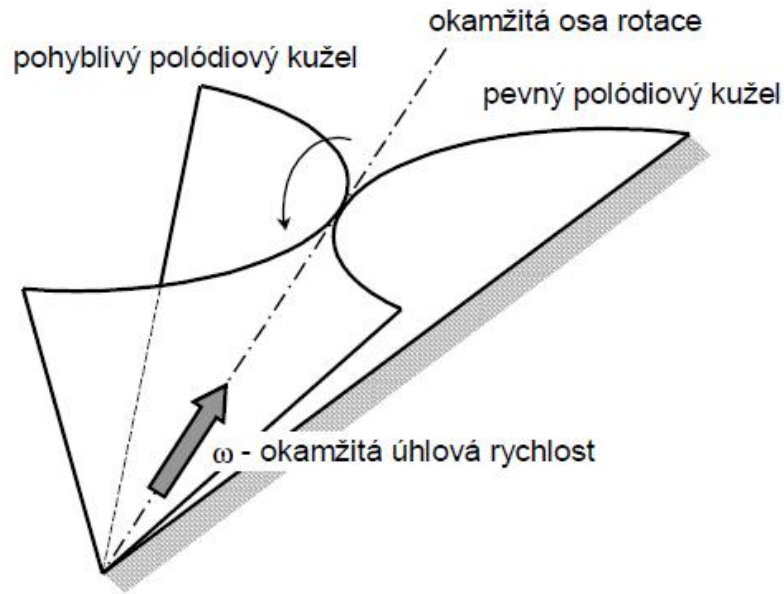
v základním prostoru. Na počátku je shodný s pevným souřadným systémem, tedy $\xi_0 \equiv x$, $\eta_0 \equiv y$ a $\zeta_0 \equiv z$. Prvním natočením je tzv. precese o úhel precese ψ okolo pevné osy z , resp. osy ζ_0 , se souřadnicový systém dostane do první mezipolohy, kde osy ξ_0 a η_0 získávají nové polohy ξ_1 a η_1 , zatímco $\zeta_1 \equiv \zeta_0 \equiv z$.

Nutací se rozumí pootočení o úhel nutace ϑ okolo osy ξ_1 (tato osa bývá nazývána uzlová přímka u), která tak svou polohu zachovává $u \equiv \xi_2 \equiv \xi_1$. Osy η_1 a ζ_1 se dostávají do polohy η_2 a ζ_2 . Posledním natočením je vlastní rotace o úhel vlastní rotace φ okolo osy ζ_2 (zpravidla je tato osa osou symetrie), čímž vznikají finální polohy os η , ξ a $\zeta \equiv \zeta_2$. Střed nově vzniklého tělesového souřadnicového systému O' je shodný s původním středem O .



Obr. 3 – Zobrazení pevného a tělesového souřadného systému s Eulerovy úhly⁸

Množina přímek, které jsou okamžitými osami rotace, tvoří kuželovou plochu s vrcholem ve středu sférického pohybu – polódiový kužel. Pro okamžité osy rotace v pevném prostoru je nazýván pevný polódiový kužel a pro tělesový prostor pohyblivý polódiový kužel. Vzájemně se dotýkají v okamžité ose rotace. Sférický pohyb je představován valením pohyblivého polódiového kužele po pevném.



Obr. 4 – Pevný a pohyblivý polódiový kužel ⁵

Celý sférický pohyb je pak jednoznačně určen, pokud známe Eulerovy úhly jako funkce času, které popisují pohyb precesní, nutační a vlastní rotaci tělesa:

$$\begin{aligned}\psi &= \psi(t) \\ \vartheta &= \vartheta(t) \\ \varphi &= \varphi(t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

V případě, že těleso není dále nijak zavazbeno, jsou tyto tři souřadnice nezávislé, tzn. těleso má tři stupně volnosti. V praxi se ale často jedná i o úlohy sférických pohybů s jedním nebo dvěma stupni volnosti.

Nyní je zapotřebí určit vztahy pro příslušné vektory úhlových rychlostí. Tři rotace, které těleso vykonává, jsou kolem osy z (precese), uzlové přímky u (nutace) a osy ζ (vlastní rotace). Když se ve směrech těchto os zavedou v tomto pořadí jednotkové vektory \mathbf{k} , \mathbf{e} a \mathbf{k}_t , pak lze úhlové rychlosti vyjádřit:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_\psi &= \dot{\psi} = \dot{\psi} \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\omega}_\vartheta &= \dot{\vartheta} = \dot{\vartheta} \mathbf{e} \\ \boldsymbol{\omega}_\varphi &= \dot{\varphi} = \dot{\varphi} \mathbf{k}_t\end{aligned}\tag{2.2}$$

Celková úhlová rychlost vznikne složením těchto tří složek.

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{k} + \dot{\vartheta} \mathbf{e} + \dot{\varphi} \mathbf{k}_t\tag{2.3}$$

Je nutné vyjádřit složky úhlové rychlosti v jednotném systému, proto se musí vyjádřit jednotkové vektory \mathbf{k} a \mathbf{e} v tělesovém souřadném systému:

$$\begin{aligned}\mathbf{k} &= \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{i}_t + \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{j}_t + \cos \vartheta \mathbf{k}_t \\ \mathbf{e} &= \cos \varphi \mathbf{i}_t - \sin \varphi \mathbf{j}_t\end{aligned}\tag{2.4}$$

kde \mathbf{i}_t , \mathbf{j}_t a \mathbf{k}_t jsou jednotkové vektory ve směru os tělesového souřadného systému v jeho finální poloze.

Dosazením do rovnic pro složky úhlové rychlosti v tělesovém prostoru se získají tzv. Eulerovy kinematické rovnice (2.5). Jsou pojmenovány podle švýcarského matematika Leonarda Euler, žijícího v letech 1707 až 1783.

$$\begin{aligned}\omega_\xi &= \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi \\ \omega_\eta &= \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi \\ \omega_\zeta &= \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}\end{aligned}\quad (2.5)$$

Podobně lze dosadit i naopak pro složky úhlové rychlosti v pevném souřadnicovém systému ve tvaru:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi \\ \omega_y &= \dot{\vartheta} \sin \psi - \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi \\ \omega_z &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \vartheta\end{aligned}\quad (2.6)$$

Obvodová rychlost v bodě tělesa konajícího sférický pohyb se vypočte pomocí vektorového součinu úhlové rychlosti $\boldsymbol{\omega}$ a polohového vektoru \mathbf{r} , který udává polohu (souřadnice) bodu v tělesovém nebo pevném souřadném systému. Pro tělesový souřadný systém tedy vznikne:

$$\mathbf{v}_{\xi\eta\zeta} = \boldsymbol{\omega}_{\xi\eta\zeta} \times \mathbf{r}_{\xi\eta\zeta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_t & \mathbf{j}_t & \mathbf{k}_t \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}\quad (2.7)$$

kde ξ , η a ζ jsou souřadnice bodu v tělesovém souřadnicovém systému.

Z determinantu se po úpravě a rozdělení výrazů pro jednotlivé směrové vektory získají složky obvodové rychlosti v podobě:

$$\begin{aligned}v_\xi &= \omega_\eta \cdot \zeta - \omega_\zeta \cdot \eta \\ v_\eta &= \omega_\zeta \cdot \xi - \omega_\xi \cdot \zeta \\ v_\zeta &= \omega_\xi \cdot \eta - \omega_\eta \cdot \xi\end{aligned}\quad (2.8)$$

Úplně stejným způsobem lze vyjádřit i složky obvodové rychlosti pro bod v základním prostoru, pokud se dosadí vektor úhlové rychlosti a polohový vektor udávající polohu bodu v pevném souřadném systému.

$$\mathbf{v}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_{xyz} \times \mathbf{r}_{xyz} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}\quad (2.9)$$

kde x , y a z jsou souřadnice bodu v pevném souřadném systému.

Po úpravě tedy vznikne následující soustava rovnic.

$$\begin{aligned}v_x &= \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y \\v_y &= \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z \\v_z &= \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x\end{aligned}\tag{2.10}$$

Z rovnic (2.5), resp. (2.6) pak lze snadno určit i složky úhlového zrychlení jako derivace odpovídajících složek úhlové rychlosti:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\xi &= \dot{\omega}_\xi \\ \varepsilon_\eta &= \dot{\omega}_\eta \\ \varepsilon_\zeta &= \dot{\omega}_\zeta\end{aligned}\tag{2.11}$$

Nebo pro základní prostor tělesa:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \dot{\omega}_x \\ \varepsilon_y &= \dot{\omega}_y \\ \varepsilon_z &= \dot{\omega}_z\end{aligned}\tag{2.12}$$

Poslední kinematickou veličinou je okamžité zrychlení daného bodu. To se vypočte jako derivace obvodové rychlosti.

$$\mathbf{a}_{\xi\eta\zeta} = \dot{\mathbf{v}}_{\xi\eta\zeta} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{\xi\eta\zeta} \times \mathbf{r}_{\xi\eta\zeta} + \boldsymbol{\omega}_{\xi\eta\zeta} \times \dot{\mathbf{r}}_{\xi\eta\zeta} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\xi\eta\zeta} \times \mathbf{r}_{\xi\eta\zeta} + \boldsymbol{\omega}_{\xi\eta\zeta} \times \mathbf{v}_{\xi\eta\zeta}\tag{2.13}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\xi\eta\zeta} \times \mathbf{r}_{\xi\eta\zeta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_t & \mathbf{j}_t & \mathbf{k}_t \\ \varepsilon_\xi & \varepsilon_\eta & \varepsilon_\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}\tag{2.14}$$

$$\boldsymbol{\omega}_{\xi\eta\zeta} \times \mathbf{v}_{\xi\eta\zeta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_t & \mathbf{j}_t & \mathbf{k}_t \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ v_\xi & v_\eta & v_\zeta \end{vmatrix}\tag{2.15}$$

Po úpravách a dosazení do rovnice (2.11) se získá vztah pro složky zrychlení v tělesovém prostoru:

$$\begin{aligned}a_\xi &= \varepsilon_\eta \cdot \zeta - \varepsilon_\zeta \cdot \eta + \omega_\eta \cdot v_\zeta - \omega_\zeta \cdot v_\eta \\ a_\eta &= \varepsilon_\zeta \cdot \xi - \varepsilon_\xi \cdot \zeta + \omega_\zeta \cdot v_\xi - \omega_\xi \cdot v_\zeta \\ a_\zeta &= \varepsilon_\xi \cdot \eta - \varepsilon_\eta \cdot \xi + \omega_\xi \cdot v_\eta - \omega_\eta \cdot v_\xi\end{aligned}\tag{2.16}$$

Obdobně lze opět vyjádřit i vztahy pro základní prostor.

$$\begin{aligned}a_x &= \varepsilon_y \cdot z - \varepsilon_z \cdot y + \omega_y \cdot v_z - \omega_z \cdot v_y \\ a_y &= \varepsilon_z \cdot x - \varepsilon_x \cdot z + \omega_z \cdot v_x - \omega_x \cdot v_z \\ a_z &= \varepsilon_x \cdot y - \varepsilon_y \cdot x + \omega_x \cdot v_y - \omega_y \cdot v_x\end{aligned}\tag{2.17}$$

2.2 Dynamika sférického pohybu

Prvním krokem pro vyšetření dynamiky sférického pohybu je sestavení konstantní matice setrvačnosti. Ta musí být zavedena v tělesovém souřadnicovém systému, v jiném by byla obecně funkcí času. Matice setrvačnosti je symetrická podle hlavní diagonály, přičemž na ní leží momenty setrvačnosti k jednotlivým osám ξ , η a ζ . Mimo ni jsou pak deviační momenty, což dává výsledný tvar matice:

$$\mathbf{J}_{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} I_\xi & -D_{\xi\eta} & -D_{\xi\zeta} \\ -D_{\xi\eta} & I_\eta & -D_{\eta\zeta} \\ -D_{\xi\zeta} & -D_{\eta\zeta} & I_\zeta \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Ze základních poznatků z dynamiky je znám vztah pro moment hybnosti:

$$\mathbf{L} = \mathbf{J}_{\xi\eta\zeta} \boldsymbol{\omega}_{\xi\eta\zeta} \quad (2.19)$$

Stejně tak i vztah pro hybnost soustavy. Obě tyto vektorové veličiny jsou vyjádřeny v tělesovém souřadnicovém systému.

$$\mathbf{H} = m\mathbf{v}_s = m\boldsymbol{\omega}_{\xi\eta\zeta} \times \mathbf{r}_s \quad (2.20)$$

kde \mathbf{v}_s je vektor rychlosti středu hmotnosti tělesa a \mathbf{r}_s jeho polohový vektor.

Kinetickou energii lze potom vyjádřit pomocí momentu hybnosti a po dosazení se získá vztah analogický ke kinetické energii tělesa konajícího jednoduchý rotační pohyb.

$$E_k = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{\xi\eta\zeta}^T \mathbf{L} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_{\xi\eta\zeta}^T \mathbf{J}_{\xi\eta\zeta} \boldsymbol{\omega}_{\xi\eta\zeta} \quad (2.21)$$

Pokud jsou souřadnicové osy hlavními osami setrvačnosti (deviační momenty jsou nulové), pak se získá vztah:

$$E_k = \frac{1}{2} (I_\xi \omega_\xi^2 + I_\eta \omega_\eta^2 + I_\zeta \omega_\zeta^2) \quad (2.22)$$

Na těleso, konající sférický pohyb, působí silové účinky ve formě vektorů setrvačných sil \mathbf{D} a setrvačných momentů (dvojic) \mathbf{M}_D . Tyto účinky lze vypočítat jako derivace hybnosti, resp. momentu hybnosti.

$$\mathbf{D} = -\dot{\mathbf{H}} \quad (2.23)$$

$$\mathbf{M}_D = -\dot{\mathbf{L}} \quad (2.24)$$

Po dosazení a derivaci hybnosti do vztahu (2.23) se získají složky setrvačných sil ve směru os tělesového souřadného systému:

$$\begin{aligned} D_\xi &= -m \cdot a_\xi \\ D_\eta &= -m \cdot a_\eta \\ D_\zeta &= -m \cdot a_\zeta \end{aligned} \quad (2.25)$$

Obdobně lze do vztahu (2.24) dosadit první derivaci momentu hybnosti pro zjištění setrvačných momentů:

$$\begin{aligned}M_{D\xi} &= -I_\xi \cdot \varepsilon_\xi - \omega_\eta \cdot \omega_\zeta \cdot (I_\zeta - I_\eta) \\M_{D\eta} &= -I_\eta \cdot \varepsilon_\eta - \omega_\zeta \cdot \omega_\xi \cdot (I_\xi - I_\zeta) \\M_{D\zeta} &= -I_\zeta \cdot \varepsilon_\zeta - \omega_\xi \cdot \omega_\eta \cdot (I_\eta - I_\xi)\end{aligned}\tag{2.26}$$

Při zatížení tělesa, které koná sférický pohyb, vnějšími silovými účinky platí tři diferenciální pohybové rovnice ve tvaru:

$$\begin{aligned}I_\xi \cdot \varepsilon_\xi + \omega_\eta \cdot \omega_\zeta \cdot (I_\zeta - I_\eta) &= \sum M_{\xi i} \\I_\eta \cdot \varepsilon_\eta + \omega_\zeta \cdot \omega_\xi \cdot (I_\xi - I_\zeta) &= \sum M_{\eta i} \\I_\zeta \cdot \varepsilon_\zeta + \omega_\xi \cdot \omega_\eta \cdot (I_\eta - I_\xi) &= \sum M_{\zeta i}\end{aligned}\tag{2.27}$$

Tato soustava rovnic se nazývá Eulerovy pohybové rovnice.

3 Parametry atrakce

Ke správnému kinematickému a dynamickému rozboru je potřeba znát základní délkové a hmotové parametry závěsu této atrakce. Tyto parametry budou použity k určení zatěžujících okrajových podmínek při pevnostní kontrole.

3.1 Délkové parametry

Délkové parametry závěsu jsou vypsány v tabulce 1.

vzdálenost příruby rotoru od osy kývání	$\rho_p = 6,2 \text{ m}$
vzdálenost těžiště celého závěsu od osy kývání	$\rho_z = 7,0 \text{ m}$
vzdálenost těžiště rotoru závěsu od osy kývání	$\rho_r = 8,6 \text{ m}$
vzdálenost doplňujících hmotností od osy kývání	$\rho_d = 10,0 \text{ m}$
vzdálenost konce sedaček od osy kývání (celková délka)	$\rho_c = 10,5 \text{ m}$
poloměr k doplňující hmotnosti	$r_d = 2,5 \text{ m}$
celkový poloměr gondol	$r_c = 3,1 \text{ m}$

Tab. 1 – Rozměrové parametry atrakce

Rozměry konstrukce čtyřnožky, hlavice a podvozku nejsou pro kinematické a dynamické výpočty podstatné, proto zde nejsou uváděny. Je dle nich ale vytvořen model, na kterém bude prováděna pevnostní kontrola.

3.2 Hmotové parametry

V tabulce 2 jsou uvedeny všechny potřebné parametry hmotnosti jednotlivých částí závěsu společně s momenty setrvačnosti vůči jednotlivým osám.

celková hmotnost závěsu	$m_z = 5000 \text{ kg}$
hmotnost rotoru závěsu s gondolami	$m_r = 3500 \text{ kg}$
doplňující hmotnost na 1 gondolu (celkem 4 gondoly)	$m_d = 180 \text{ kg}$
hmotnost osoby (celkem 20 osob)	$m_o = 80 \text{ kg}$
moment setrvačnosti závěsu k ose kývání	$I_z = 275000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
moment setrvačnosti závěsu v těžišti k ose x	$I_{tx} = 52000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
moment setrvačnosti závěsu v těžišti k ose z	$I_{tz} = 52000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
moment setrvačnosti závěsu v těžišti k ose y (osa vlastní rotace)	$I_{ty} = 15600 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
moment setrvačnosti rotoru závěsu k ose vlastní rotace	$I_y = 15400 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

Tab. 2 – Hmotové parametry atrakce

Stejně jako v předchozí podkapitole nebudou uváděny parametry ostatních částí atrakce.

3.3 Dupočítané parametry

Ze zadaných parametrů lze poté vypočítat další rozměrové a hmotové parametry, které dopomůžou k následnému dynamickému rozboru atrakce. Jako první se určí celková doplňková hmotnost (doplňující hmotnosti na každé gondole a osoby):

$$m_{do} = 4 \cdot m_d + 20 \cdot m_o = 2320 \text{ kg} \quad (3.1)$$

A následně celková hmotnost závěsu včetně doplňkové hmotnosti:

$$m_c = m_z + m_{do} = 7320 \text{ kg} \quad (3.2)$$

Pomocí zjištěných hmotností se dá dupočítat vzdálenost těžiště celého závěsu včetně doplňkových hmotností od osy kývání, kam bude zavedena tíhová síla:

$$\rho_c = \frac{1}{m_c} \cdot (m_z \cdot \rho_z + m_{do} \cdot \rho_d) = 7,951 \text{ m} \quad (3.3)$$

Tíhová síla se vypočte z celkové hmotnosti závěsu a tíhového zrychlení, které bude uvažováno o velikosti $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

$$G_c = m_c \cdot g = 71810 \text{ N} \quad (3.4)$$

S využitím Steinerovy věty se vypočítají moment setrvačnosti celého závěsu včetně doplňkových hmot k ose kývání I_k a moment setrvačnosti rotoru závěsu vůči ose vlastní rotace I_o .

$$I_k = I_z + m_{do} \cdot \rho_d^2 = 507000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (3.5)$$

$$I_o = I_y + m_{do} \cdot r_d^2 = 29900 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \quad (3.6)$$

Tyto momenty setrvačností budou v následujících kapitolách použity k výpočtu dynamických účinků vznikajících při sférickém pohybu.

Dalším krokem v dynamické analýze bude i určení silových účinků působících na přírubu rotoru, k čemuž je zapotřebí dupočítat několik dalších parametrů.

Hmotnost rotoru včetně doplňujících hmot a osob určuje celkovou hmotnost části závěsu, která vykonává vlastní rotaci:

$$m_{cr} = m_r + m_{do} = 5820 \text{ kg} \quad (3.7)$$

Vzdálenost těžiště rotoru (včetně doplňkových hmot) od osy kývání závěsu se určí stejným způsobem jako pro těžiště celého závěsu v rovnici (3.3), ale počítá se pouze s jeho rotující částí.

$$\rho_{cr} = \frac{1}{m_{cr}} \cdot (m_r \cdot \rho_r + m_{do} \cdot \rho_d) = 9,158 \text{ m} \quad (3.8)$$

Opět se dopočte i tíhová síla rotoru závěsu působící na této vzdálenosti od osy kývání závěsu s tím, že se počítá jen s hmotností rotoru:

$$G_{cr} = m_{cr} \cdot g = 57090 \text{ N} \quad (3.9)$$

Na závěr se určí vzdálenost celkového těžiště rotoru od příruby jako rozdíl jejich vzdáleností od osy kývání závěsu.

$$\Delta\rho_{cr} = \rho_{cr} - \rho_p = 2,958 \text{ m} \quad (3.10)$$

Tato vzdálenost určuje rameno sil působících na přírubu rotoru.

4 Kinematický rozbor

Jak již bylo naznačeno v kapitole 1, rotor závěsu koná sférický pohyb. Ten je složený ze dvou současných rotací – precese a vlastní rotace. Poslední rotaci, tedy nutaci, těleso nekoná, jedná se pouze o konstantní natočení o nutační úhel. Středem sférického pohybu je pak průsečík vodorovné osy kývání a osy závěsu.

Pevný souřadný systém je tvořen vodorovnou osou z , která je totožná s osou kývání závěsu, osou x , která je vodorovná a kolmá na osu z a svislou osou y , která splývá s osou závěsu, který je ve stabilní poloze. Počátek pevného souřadného systému se nachází ve středu sférického pohybu.

Tělesový souřadný systém je spojený s rotorem závěsu. Jeho počátek zůstává ve středu sférického pohybu a ve výchozí poloze je shodný se souřadným systémem pevným, pro jeho osy tedy platí: $\xi_0 \equiv x$, $\eta_0 \equiv y$ a $\zeta_0 \equiv z$.

4.1 Precese

První rotací, kterou koná rotor závěsu, je jeho kývání. Jedná se o nerovnoměrný pohyb, který je ale periodický a lze vyjádřit sinusovým průběhem. Maximální úhel precese ψ je 120° . Tělesový souřadnicový systém se tímto pohybem dostává do první mezipolohy, kdy proběhlo natočení okolo osy ζ_0 (resp. osy kývání z pevného souřadnicového systému), která tak zůstává neměnná $\zeta_1 \equiv \zeta_0$. Zbylé dvě osy se natočí do svých mezipoloh ξ_1 a η_1 .

Precesní pohyb lze zapsat následující rovnicí:

$$\psi = \psi_a \cdot \sin(\Omega_\psi \cdot t) \quad (4.1)$$

kde ψ_a je amplituda kývání závěsu ($\psi_a = 120^\circ$), Ω_ψ je kruhová frekvence precesního pohybu a t je čas.

Dále lze pomocí první a druhé derivace rovnice (4.1) určit úhlovou rychlost, resp. úhlové zrychlení precesního pohybu.

$$\omega_\psi = \dot{\psi} = \psi_a \cdot \Omega_\psi \cdot \cos(\Omega_\psi \cdot t) \quad (4.2)$$

$$\varepsilon_\psi = \ddot{\psi} = -\psi_a \cdot \Omega_\psi^2 \cdot \sin(\Omega_\psi \cdot t) \quad (4.3)$$

Pohyb ale stále není jednoznačně určen, protože není známa kruhová frekvence kývání Ω_ψ , resp. perioda a frekvence precese. K jejich určení se dá vyjít z pohybové rovnice pro toto kývání:

$$I_k \cdot \ddot{\psi} + m_c \cdot g \cdot \rho_{tc} \cdot \sin \psi = 0 \quad (4.4)$$

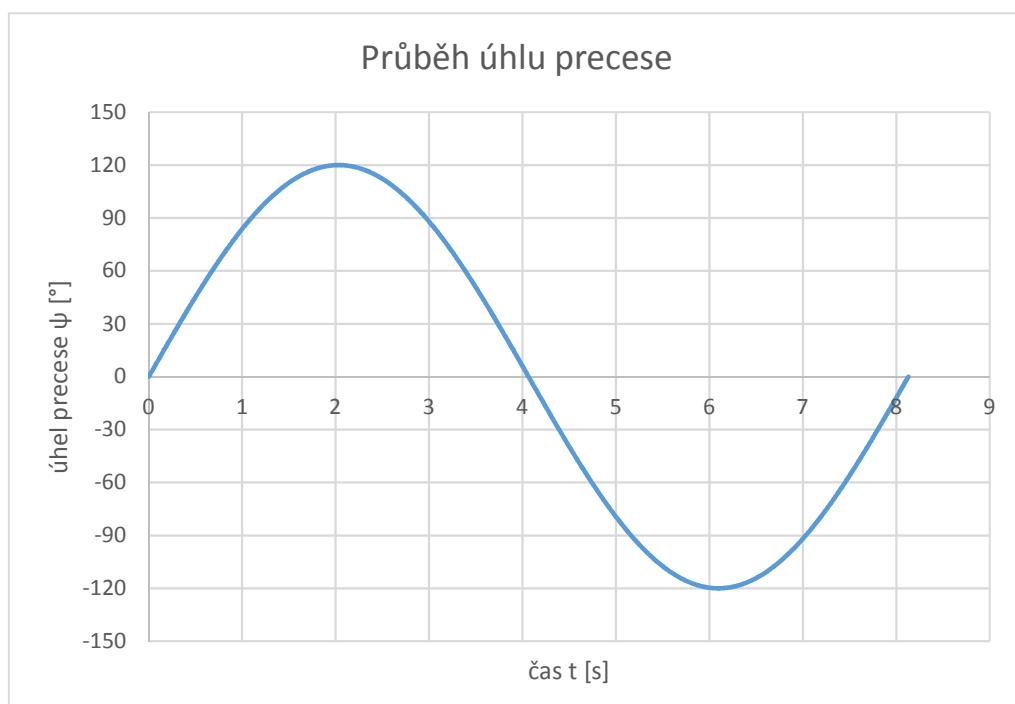
kde $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ je tíhové zrychlení. Jelikož je rozkmit kývání značný, tento pohyb nelze jakkoliv linearizovat a vypočítat rovnici analyticky. K řešení bylo proto využito numerické integrace pomocí software Mathcad 15.0. Při této metodě vzniká numerická chyba, nicméně při vysokém počtu integračních kroků je výsledek dostatečně přesný.

Z výpočtu plyne délka periody precesního pohybu $T_\psi = 8,129 \text{ s}$. Z periody lze snadno určit také frekvenci f_ψ a kruhovou frekvenci Ω_ψ kývání:

$$f_\psi = \frac{1}{T_\psi} = 0,123 \text{ Hz} \quad (4.5)$$

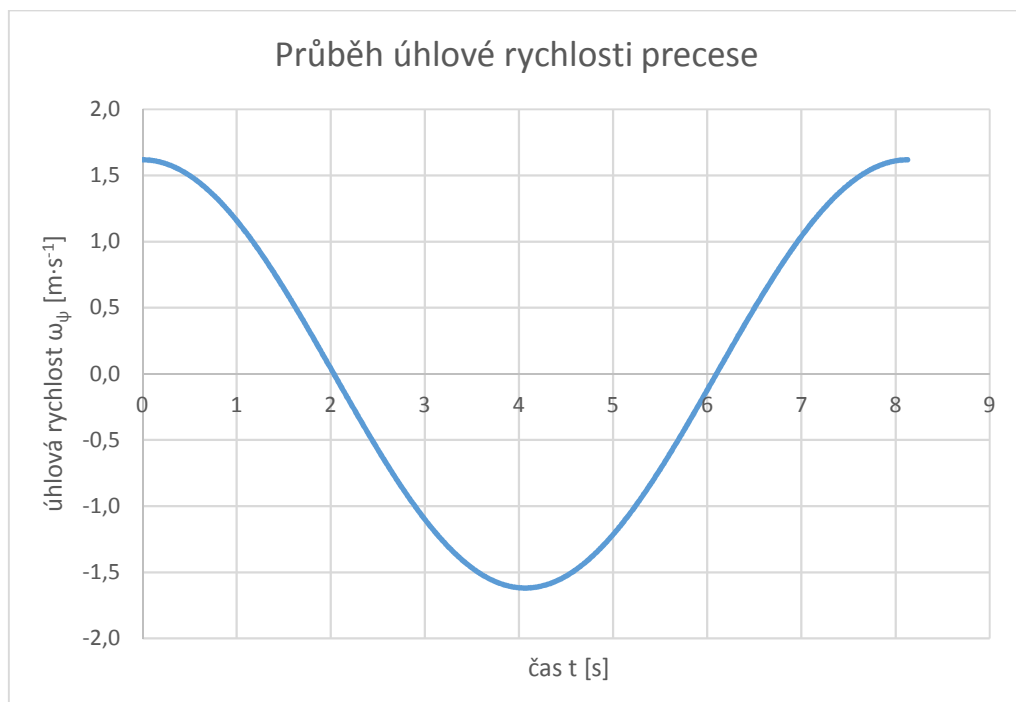
$$\Omega_\psi = 2 \cdot \pi \cdot f_\psi = 0,773 \text{ s}^{-1} \quad (4.6)$$

Z rovnic (4.1) až (4.3) se mohou vykreslit průběhy úhlu precese (na obrázku 5), úhlové rychlosti (na obrázku 6) a úhlového zrychlení (na obrázku 7) tohoto pohybu.



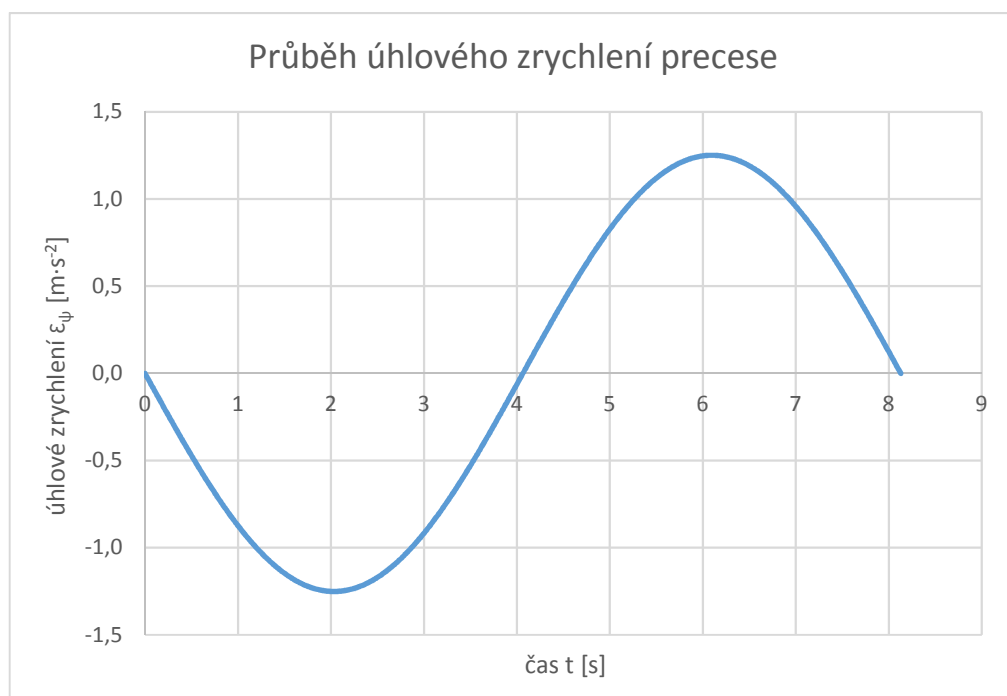
Obr. 5 – Průběh úhlu precese v čase

Maximální úhel výkyvu závěsu 120° plyne ze zadání. V této poloze je úhlová rychlost nulová, a naopak úhlové zrychlení na své maximální hodnotě v opačném směru.



Obr. 6 – Průběh úhlové rychlosti precese v čase

Úhlová rychlost nabývá svého maxima, když je závěs ve svislé poloze, tedy úhel precese je roven 0° . Hodnota tohoto maxima je $\omega_{\psi max} = 1,619 \text{ s}^{-1}$. Úhlové zrychlení v tomto bodě je nulové.



Obr. 7 – Průběh úhlového zrychlení precese v čase

Jak už bylo řečeno, maximální úhlové zrychlení nastává v krajní poloze závěsu (úhel precese $\pm 120^\circ$). Toto maximum je vyčísleno na $\epsilon_{\psi max} = 1,251 \text{ s}^{-2}$.

Číselné hodnoty těchto tří veličin pro jednu čtvrtperiodu s krokem 15° jsou uvedeny v tabulce 3.

t [s]	ψ [°]	ω_ψ [s ⁻¹]	ε_ψ [s ⁻²]
0	0	1,619	0
0,162	15	1,606	-0,156
0,327	30	1,567	-0,313
0,497	45	1,501	-0,469
0,677	60	1,402	-0,626
0,873	75	1,264	-0,782
1,097	90	1,071	-0,938
1,378	105	0,784	-1,095
2,032	120	0	-1,251

Tab. 3 – Kinematické parametry kývání ve vybraných polohách

4.2 Nutace

Nutační pohyb u tohoto sférického pohybu nenastává, úhel nutace ϑ je tedy konstantní:

$$\vartheta = 90^\circ \quad (4.7)$$

V případě konstantního úhlu natočení jsou samozřejmě první a druhá derivace, tedy úhlová rychlost ω_ϑ a úhlové zrychlení ε_ϑ nutačního pohybu, nulové.

$$\omega_\vartheta = \dot{\vartheta} = 0 \quad (4.8)$$

$$\varepsilon_\vartheta = \ddot{\vartheta} = 0 \quad (4.9)$$

4.3 Vlastní rotace

Vlastní rotací se pohybuje rotor závěsu. Gondoly se sedačkami rotují kolem osy závěsu. Úhlová rychlost ω_φ tohoto pohybu je konstantní s otáčkami $n_\varphi = 8 \text{ min}^{-1}$. Úhel vlastní rotace φ se určuje dle rovnic pro rovnoměrný rotační pohyb:

$$\varphi = \omega_\varphi \cdot t \quad (4.10)$$

Úhlová rychlost se spočítá z otáček a při její konstantní hodnotě je úhlové zrychlení ε_φ vlastní rotace rovno nule.

$$\omega_\varphi = \dot{\varphi} = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{60} = 0,838 \quad (4.11)$$

$$\varepsilon_\varphi = \ddot{\varphi} = 0 \quad (4.12)$$

4.4 Celkové kinematické veličiny

Celková úhlová rychlost sférického pohybu se vyjadřuje pomocí Eulerových kinematických rovnic pro tělesový souřadný systém, jak jsou uvedeny v kapitole 2.1.

$$\begin{aligned}\omega_\xi &= \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi \\ \omega_\eta &= \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi \\ \omega_\zeta &= \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}\end{aligned}\tag{4.13}$$

Po dosazení třech pohybů sférického pohybu pro tento specifický příklad vznikají složky úhlové rychlosti pro směry os tělesového souřadného systému:

$$\begin{aligned}\omega_\xi &= \dot{\psi} \sin \varphi \\ \omega_\eta &= \dot{\psi} \cos \varphi \\ \omega_\zeta &= \dot{\varphi}\end{aligned}\tag{4.14}$$

Velikost celkové úhlové rychlosti ω lze určit pomocí následujícího vzorce:

$$|\omega| = \sqrt{\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\vartheta}\tag{4.15}$$

Pokud se dosadí tento případ pohybu, vznikne:

$$|\omega| = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\varphi}}\tag{4.15}$$

Obdobně lze určit i složky úhlového zrychlení sférického pohybu pro tělesový prostor jako derivace složek úhlových rychlostí.

$$\begin{aligned}\varepsilon_\xi &= \dot{\omega}_\xi = \ddot{\psi} \sin \varphi + \dot{\psi}\dot{\varphi} \cos \varphi \\ \varepsilon_\eta &= \dot{\omega}_\eta = \ddot{\psi} \cos \varphi - \dot{\psi}\dot{\varphi} \sin \varphi \\ \varepsilon_\zeta &= \dot{\omega}_\zeta = \ddot{\varphi} = 0\end{aligned}\tag{4.16}$$

A velikost celkového úhlového zrychlení ε pro sférický pohyb této atrakce se opět určí s pomocí Pythagorovy věty:

$$|\varepsilon| = \sqrt{\varepsilon_\xi^2 + \varepsilon_\eta^2 + \varepsilon_\zeta^2} = \sqrt{\ddot{\psi}^2 + \dot{\psi}^2}\tag{4.17}$$

Dále je zapotřebí zjistit složky okamžitého zrychlení, resp. obvodové rychlosti v těžišti celého závěsu. Toto je nutné k určení setrvačných sil působících při sférickém pohybu. Těžiště závěsu se nachází na ose vlastní rotace v důsledku uvažované symetrie celého závěsu podle této osy. Jediná nenulová souřadnice těžiště je tedy na ose ζ , její hodnota je rovna ρ_c dle podkapitoly 3.3.

Pro obvodovou rychlost v těžišti závěsu se vychází z rovnic (2.8), kam se dosadí již zmíněné souřadnice těžiště, a dále složky úhlové rychlosti z rovnic (4.14).

$$\begin{aligned}v_{T\xi} &= \dot{\psi} \cos \varphi \cdot \rho_c \\v_{T\eta} &= -\dot{\psi} \sin \varphi \cdot \rho_c \\v_{T\zeta} &= 0\end{aligned}\tag{4.18}$$

V některých případech může být výhodnější vyjádření složek obvodové rychlosti pro tělesový souřadný systém v druhé mezipoloze, tedy před aplikací vlastní rotace (úhel vlastní rotace $\varphi = 0^\circ$).

$$\begin{aligned}v_{T\xi_2} &= \dot{\psi} \cdot \rho_c \\v_{T\eta_2} &= 0 \\v_{T\zeta_2} &= 0\end{aligned}\tag{4.19}$$

Jak lze vidět z rovnic výše, těžiště závěsu v druhé mezipoloze tělesového souřadného systému má nenulovou jen jedinou složku rychlosti $v_{T\xi_2}$, a to ve směru osy ξ_2 . Díky symetrii rotoru závěsu těžiště závěsu koná pouze kývavý pohyb precese.

Obdobně pro okamžité zrychlení se použijí rovnice (2.16), s dosazením složek souřadnic těžiště, obvodové rychlosti, úhlové rychlosti a úhlového zrychlení z předešlých vztahů. Po roznásobení a úpravách vzniknou složky zrychlení:

$$\begin{aligned}a_{T\xi} &= \ddot{\psi} \cos \varphi \cdot \rho_c \\a_{T\eta} &= -\ddot{\psi} \sin \varphi \cdot \rho_c \\a_{T\zeta} &= -\dot{\psi}^2 \cdot \rho_c\end{aligned}\tag{4.20}$$

Opět lze s výhodou vyjádřit složky okamžitého zrychlení pro tělesový souřadný systém v druhé mezipoloze (úhel vlastní rotace $\varphi = 0^\circ$).

$$\begin{aligned}a_{T\xi_2} &= \ddot{\psi} \cdot \rho_c \\a_{T\eta_2} &= 0 \\a_{T\zeta_2} &= -\dot{\psi}^2 \cdot \rho_c\end{aligned}\tag{4.21}$$

Těžiště závěsu má dvě nenulové složky okamžitého zrychlení, kde $a_{T\xi_2}$ tvoří tečné zrychlení, které mění velikost vektoru obvodové rychlosti, a $a_{T\zeta_2}$ představuje odstředivé (dostředivé, jelikož má zápornou hodnotu) zrychlení, které udržuje kruhovou trajektorii těžiště a mění směr vektoru obvodové rychlosti.

Kinematické parametry obvodových rychlostí a okamžitého zrychlení těžiště závěsu ve vybraných polohách jsou uvedeny v tabulce 4.

$\psi [^\circ]$	$v_{T\xi_2} [m \cdot s^{-1}]$	$a_{T\xi_2} [m \cdot s^{-2}]$	$a_{T\zeta_2} [m \cdot s^{-2}]$
0	12,871	0	-20,837
15	12,770	-1,244	-20,511
30	12,463	-2,487	-19,534
45	11,932	-3,731	-17,907
60	11,147	-4,974	-15,628
75	10,048	-6,218	-12,697
90	8,514	-7,462	-9,116
105	6,231	-8,705	-4,884
120	0	-9,949	0

Tab. 4 – Kinematické parametry těžiště ve vybraných polohách

Pro určení kinematických parametrů v přírubě rotoru závěsu zůstávají všechny vztahy výše ve stejné podobě, mění se jen souřadnice, kdy se používá těžiště rotoru závěsu namísto těžiště celého závěsu. Souřadnice těžiště na ose ζ je v tomto případě rovna ρ_{cr} .

5 Dynamický rozbor

Dynamický rozbor úlohy bude proveden ve dvou částech, a to analýza setrvačných účinků působících na nepohyblivou nosnou konstrukci atrakce a dále účinků působících na přírubu rotoru závěsu.

5.1 Setrvačné účinky na nosnou konstrukci

Na nosnou konstrukci působí setrvačná síla a setrvačný moment. Oba tyto účinky mají tři složky podle zvoleného souřadného systému a působíště v celkovém těžišti závěsu (včetně doplňkových hmot a osob).

Setrvačná síla \mathbf{D} je dána dle vztahů (2.25) jako záporný součin hmotnosti závěsu a zrychlení jeho těžiště.

$$\begin{aligned} D_{\xi} &= -m \cdot a_{\xi} \\ D_{\eta} &= -m \cdot a_{\eta} \\ D_{\zeta} &= -m \cdot a_{\zeta} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Okamžité zrychlení v těžišti závěsu pro tělesový souřadnicový systém v druhé mezipoloze je uvedeno v předchozí kapitole. Z těchto vztahů vyplývají složky síly:

$$\begin{aligned} D_{\xi_2} &= -m_c \cdot \ddot{\psi} \cdot \rho_c = -m_c \cdot \varepsilon_{\psi} \cdot \rho_c \\ D_{\eta_2} &= 0 \\ D_{\zeta_2} &= m_c \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \rho_c = m_c \cdot \omega_{\psi}^2 \cdot \rho_c \end{aligned} \tag{5.2}$$

Připočte-li se působení tíhové síly G_c , lze určit celkovou osovou sílu F_o působící ve směru osy závěsu a příčnou sílu F_p působící ve směru kolmém, tedy ve směru okamžitého zrychlení těžiště závěsu, v němž mají tyto síly působíště.

$$F_p = G_c \cdot \sin \psi - D_{\xi_2} \tag{5.3}$$

$$F_o = G_c \cdot \cos \psi + D_{\zeta_2} \tag{5.4}$$

Setrvačný moment \mathbf{M}_D vyplývá z rovnic (2.26) a využívá momentů setrvačnosti závěsu vzhledem k tělesovým osám, úhlových rychlostí (4.14) a úhlových zrychlení (4.16) v tomto souřadnicovém systému.

$$\begin{aligned} M_{D\xi} &= -I_{\xi} \cdot \varepsilon_{\xi} - \omega_{\eta} \cdot \omega_{\zeta} \cdot (I_{\zeta} - I_{\eta}) \\ M_{D\eta} &= -I_{\eta} \cdot \varepsilon_{\eta} - \omega_{\zeta} \cdot \omega_{\xi} \cdot (I_{\xi} - I_{\zeta}) \\ M_{D\zeta} &= -I_{\zeta} \cdot \varepsilon_{\zeta} - \omega_{\xi} \cdot \omega_{\eta} \cdot (I_{\eta} - I_{\xi}) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Momenty setrvačnosti k tělesovým osám I_{ξ} , I_{η} a I_{ζ} byly vypočteny jako moment setrvačnosti k ose závěsu I_k a moment setrvačnosti k osám kolmým k ose závěsu I_o (rovnost

těchto momentů zapříčiněna symetrií závěsu podle osy vlastní rotace) dle Steinerových vět v rovnicích (3.5) a (3.6) s tím, že platí:

$$I_{\zeta} = I_k \quad (5.6)$$

$$I_{\xi} = I_{\eta} = I_o \quad (5.7)$$

Po dosazení a úpravě jsou získány složky setrvačného momentu

$$\begin{aligned} M_{D\xi} &= -I_k \cdot \varepsilon_{\psi} \cdot \sin \varphi - I_o \cdot \omega_{\psi} \cdot \omega_{\varphi} \cdot \cos \varphi \\ M_{D\eta} &= -I_k \cdot \varepsilon_{\psi} \cdot \cos \varphi + I_o \cdot \omega_{\psi} \cdot \omega_{\varphi} \cdot \sin \varphi \\ M_{D\zeta} &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Opět je výhodnější vyjádřit tyto momenty pro druhou mezipolohu tělesových os, tedy pro úhel vlastní rotace $\varphi = 0^\circ$.

$$\begin{aligned} M_{D\xi_2} &= -I_o \cdot \omega_{\psi} \cdot \omega_{\varphi} \\ M_{D\eta_2} &= -I_k \cdot \varepsilon_{\psi} \\ M_{D\zeta_2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

kde moment $M_{D\eta_2}$ je použit v pohybové rovnici kývání (4.4), a tedy nepředstavuje zatížení nosné konstrukce a moment $M_{D\xi_2}$ je nazýván gyroskopický moment.

Nyní jsou známy vztahy pro všechny silové účinky zatěžující nosnou konstrukci a je možno přistoupit k jejich vyčíslení pro vybrané polohy závěsu. Opět budou uvedeny hodnoty pro jednu čtvrtperiodu kývání s rozestupem úhlu precese 15° .

ψ [°]	F_o [N]	F_p [N]	$M_{D\xi_2}$ [N · m]
0	224334	0	-40551
15	219504	9482	-40233
30	205180	17698	-39263
45	181853	23467	-37591
60	150298	25776	-35118
75	111530	23847	-31655
90	66730	17190	-26822
105	17162	5640	-19632
120	-35905	-10637	0

Tab. 5 – Setrvačné účinky zatěžující nosnou konstrukci

Kromě zatěžujících účinků uvedených v tabulce 5 je samozřejmě nutno počítat navíc s vlastní tíhou nosné konstrukce.

5.2 Setrvačné účinky v přírubě rotoru závěsu

Dalším bodem dynamické analýzy je určení setrvačných sil a momentů, které působí na přírubu rotoru závěsu. Tyto účinky se opět budou stanovovat k druhé mezipoloze tělesového souřadnicového systému, jeho počátek bude ale posunut do polohy příruby závěsu, čímž vzniknou posunuté osy ξ'_2 a η'_2 rovnoběžné se svými původními polohami. Osa $\zeta'_2 = \zeta_2 = \zeta$ jakožto osa závěsu a osa vlastní rotace zůstává stejná.

Pro úplnost bude v tomto případě počítáno znovu i s tíhou rotoru závěsu G_{cr} vypočítanou ve vztahu (3.9).

Pro určení setrvačných sil bude použito stejných poznatků jako v předchozí podkapitole, změni se pouze vzdálenost na ρ_{cr} :

$$\begin{aligned} D_{\xi'_2} &= -m_{cr} \cdot \ddot{\psi} \cdot \rho_{cr} = -m_{cr} \cdot \varepsilon_{\psi} \cdot \rho_{cr} \\ D_{\eta'_2} &= 0 \\ D_{\zeta'_2} &= m_{cr} \cdot \dot{\psi}^2 \cdot \rho_{cr} = m_{cr} \cdot \omega_{\psi}^2 \cdot \rho_{cr} \end{aligned} \quad (5.10)$$

Při započtení působení tíhové síly vzniká osová a příčná síla v těžišti rotoru, kdy osová síla F'_o působí ve směru osy příruby (osy závěsu) a příčná síla F'_p působí ve směru kolmém, tedy ve směru okamžitého zrychlení příruby.

$$F'_p = G_{cr} \cdot \sin \psi - D_{\xi'_2} \quad (5.11)$$

$$F'_o = G_{cr} \cdot \cos \psi + D_{\zeta'_2} \quad (5.12)$$

Co se týče momentového zatížení příruby, vznikají zde dvě složky ohybového momentu. První složka $M_{o\xi'_2}$ je stejně jako u zatěžování nosné konstrukce rovna gyroskopickému momentu. Druhá složka $M_{o\eta'_2}$ je dána příčnou silou, která působí na rameni vzdálenosti celkového těžiště rotoru závěsu od příruby závěsu. Poslední složka $M_{o\zeta'_2}$ je stejně jako u případu nosné konstrukce nulová.

$$\begin{aligned} M_{o\xi'_2} &= -I_o \cdot \omega_{\psi} \cdot \omega_{\varphi} \\ M_{o\eta'_2} &= F'_p \cdot \Delta\rho_{cr} \\ M_{o\zeta'_2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Výsledné silové a momentové účinky v přírubě rotoru jsou uvedeny v tabulce 6 opět pro polohu závěsu odstupňovanou po úhlu precese 15° .

ψ [°]	F'_o [N]	F'_p [N]	$M_{o\xi'_2}$ [N · m]	$M_{o\eta'_2}$ [N · m]
0	196777	0	-40551	0
15	192649	6444	-40233	19051
30	180398	11874	-39263	35123
45	160412	15362	-37591	45441
60	133309	16098	-35118	47619
75	99897	13465	-31655	39831
90	61111	7074	-26822	20925
105	17961	-3,208	-19632	-9490
120	-28547	-17,249	0	-51023

Tab. 6 – Silové a momentové účinky zatěžující přírubu rotoru

Momentové účinky lze pak ještě upravit do tvaru celkového ohybového momentu za pomoci Pythagorovy věty.

$$M_{oc} = \sqrt{M_{o\xi'_2}^2 + M_{o\eta'_2}^2} \quad (5.14)$$

6 Pevnostní kontrola

Pevnostní kontrola konstrukce čtyřnožky byla provedena v prostředí software Ansys Workbench 19.2, který využívá diskrétní metody konečných prvků, která v této kapitole bude krátce představena a následně zde bude popsán použitý materiál spolu s geometrickým a výpočetním modelem konstrukce.

6.1 Metoda konečných prvků

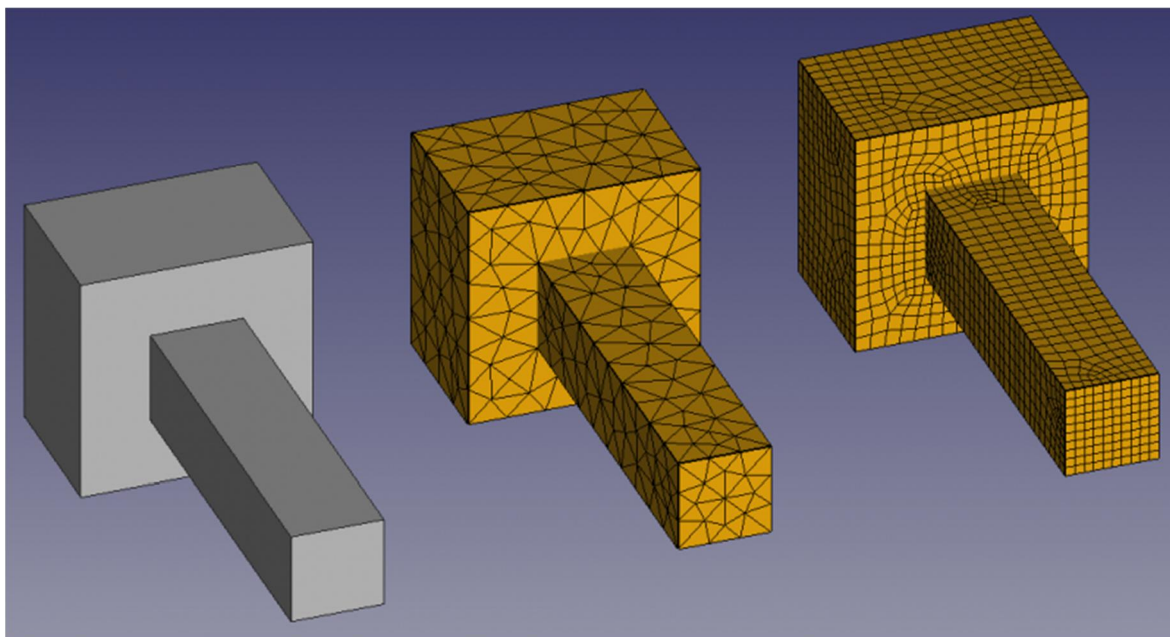
Analytickým výpočtem se dají řešit pouze ty nejjednodušší úlohy těles elementárních tvarů. U složitějších úloh již ruční výpočet reálně možný není (resp. by byl neuvěřitelně zdoluhavý a komplikovaný) a proto se přistupuje k metodám numerickým, mezi které patří mimo jiné i metoda konečných prvků (MKP).

Ta funguje na principu rozdělení spojitého tělesa, resp. jeho modelu, na model s určitým počtem prvků (neboli elementů) o konečných rozměrech. Druhů prvků lze použít více, záleží přitom na typu a požadavcích úlohy. Rozdělit je lze podle počtu dimenzí na:

- a) 1D – jednorozměrné (použití pro části těles, které mají jeden rozměr výrazně větší než zbylé dva, jako např. nosníky, pruty, trubky atd.) – např. element typu beam (nosníkový prvek), v prostoru tvoří úsečky
- b) 2D – dvourozměrné (použití pro části těles, které mají dva rozměry výrazně větší než třetí, jako např. plechy, tenkostěnné nádoby atd.) – např. element typu shell (skořepinový prvek), v prostoru tvoří plochy – u rovných těles zpravidla trojúhelníky nebo čtverce
- c) 3D – trojrozměrné (použití pro části těles, které nemají žádný rozměr zanedbatelný v porovnání se zbylými), v prostoru tvoří objemy – hranoly či jehlany

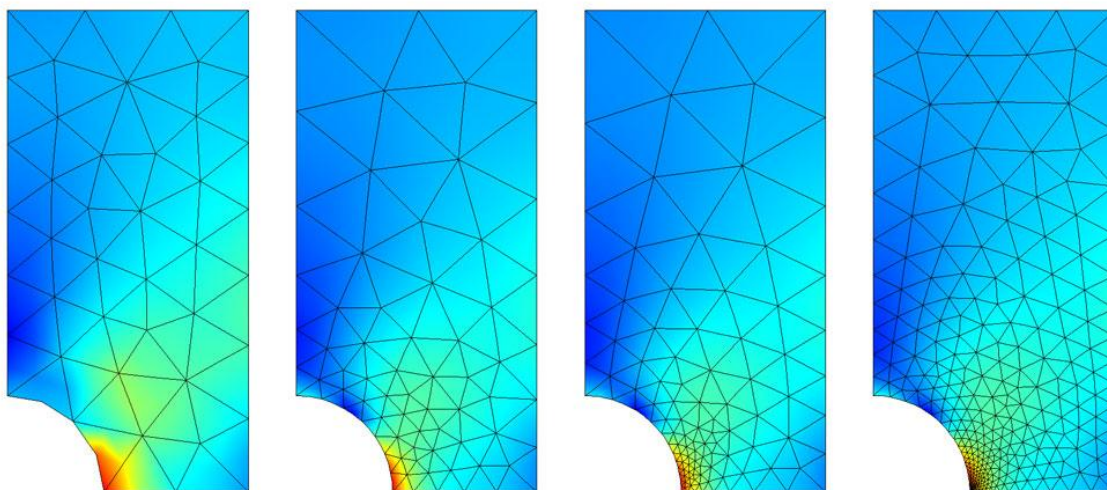
Každý element má navíc možnost mít uzly jen v jeho vrcholech, popřípadě i meziuzly většinou v polovině hran elementu. Ne vždy je volba nejvhodnějšího typu elementu jednoduchá. Pro některé objekty je možné zvolit více různých typů, a tak záleží zejména na zkušenostech a zvážení výpočtáře, který z nich použít.

Rozdělení tělesa na prvky probíhá vytvořením sítě (mesh). Příklady sítí je možno vidět na obrázku 8. Je důležité, aby byla síť na tělese co nejvíce rovnoměrná a prvky měly nejlépe pravidelné tvary (čtverec, kvádr, rovnostranný trojúhelník, rovnostěnný čtyřstěn).



Obr. 8 – Model součásti a jeho síť pomocí čtyřstěnných a šestistěnných prvků ¹²

Čím jemnější bude síť, tím kvalitnější lze očekávat výsledek. S počtem elementů ale stoupá i čas výpočtu, proto je nutné najít rovnováhu mezi přesností a délkou výpočtu. Toho se dosáhne tak, že se síť zjemňuje v oblastech zájmu nebo v místech konstrukčních vrubů, zatímco na rovných velkých plochách se mohou volit prvky větší. Příklad takového zjemňování sítě může být viděn na obrázku 9.



Obr. 9 – Postupné lokální zjemňování sítě v oblasti zájmu ¹³

Většina MKP software využívá deformační přístup, při kterém jsou neznámé složky posuvů v uzlech prvku. Jejich hodnoty se aproximují, a to zpravidla lineární nebo kvadratickou funkcí. Druhá varianta metody je silová, kde jsou neznámé složky napětí. Oba přístupy lze i kombinovat.

6.2 Materiál nosné konstrukce

Celá nosná konstrukce atrakce je vyrobená z nelegované oceli S355J2G3 (dle staršího ČSN značení 11 523). Tato konstrukční ocel je vhodná pro konstrukce namáhané staticky i dynamicky a zároveň je vhodná pro svařování, čehož je v tomto případě značně využíváno.

Modul pružnosti v tahu E je materiálová konstanta vypovídající o možnosti deformace, čím je vyšší, tím je nutné větší napětí pro stejnou hodnotu deformace. Poissonovo číslo μ udává poměr mezi příčnou a podélnou deformací a zároveň z něj lze dle vztahu níže vypočítat modul pružnosti ve smyku G .

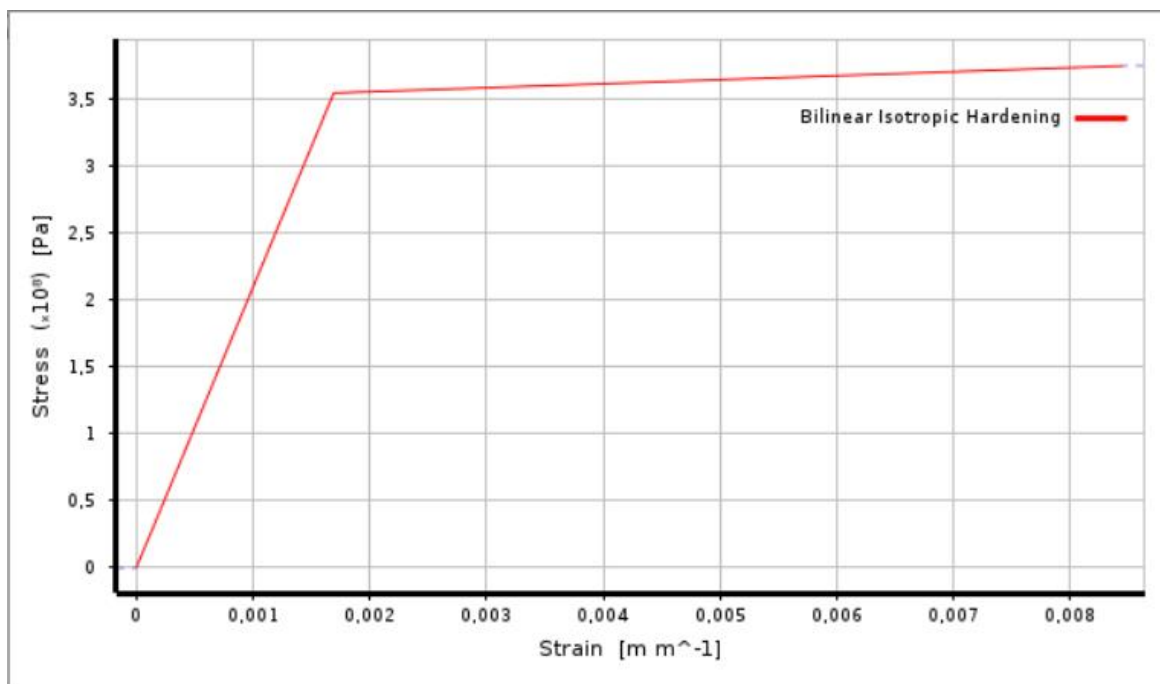
$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} \quad (6.1)$$

Nad mezí kluzu R_e nastává zvyšování relativního prodloužení bez většího nárůstu zatížení, nastávají plastické nevratné deformace a mění se fyzikální vlastnosti materiálu, kdy může dojít k jeho zpevnění. Mez pevnosti R_m udává maximální hodnotu napětí, po jehož překročení dochází k přetržení materiálu. Na závěr je ještě nutno kvůli vlastní tíze konstrukce znát i hustotu ρ , která je s ostatními hodnotami uvedena v tabulce 7.

vlastnosti oceli S235J2G3	hodnota
modul pružnosti v tahu E	$E = 210000 \text{ MPa}$
modul pružnosti ve smyku G	$G = 81000 \text{ MPa}$
Poissonovo číslo μ	$\mu = 0,3$
min. mez kluzu R_e	$R_e = 355 \text{ MPa}$
min. mez pevnosti R_m	$R_m = 490 \text{ MPa}$
hustota ρ	$\rho = 7850 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Tab. 7 – Vlastnosti oceli S235JR

Pro materiálový model bylo následně použito bilineárního izotropního zpevnění, do kterého byla zahrnuta výše zmíněná mez kluzu a tečný modul E_T (Tangent Modulus), který byl zvolen v řádu procent meze pružnosti v tahu, konkrétně $E_T = 3000 \text{ MPa}$. Při potenciálním překročení napětí na nosné konstrukci nad mez kluzu by to znamenalo, že dojde k lokálnímu zpevnění a napětí bude redukováno. Graf závislosti napětí na poměrném prodloužení je uveden na obrázku 10.



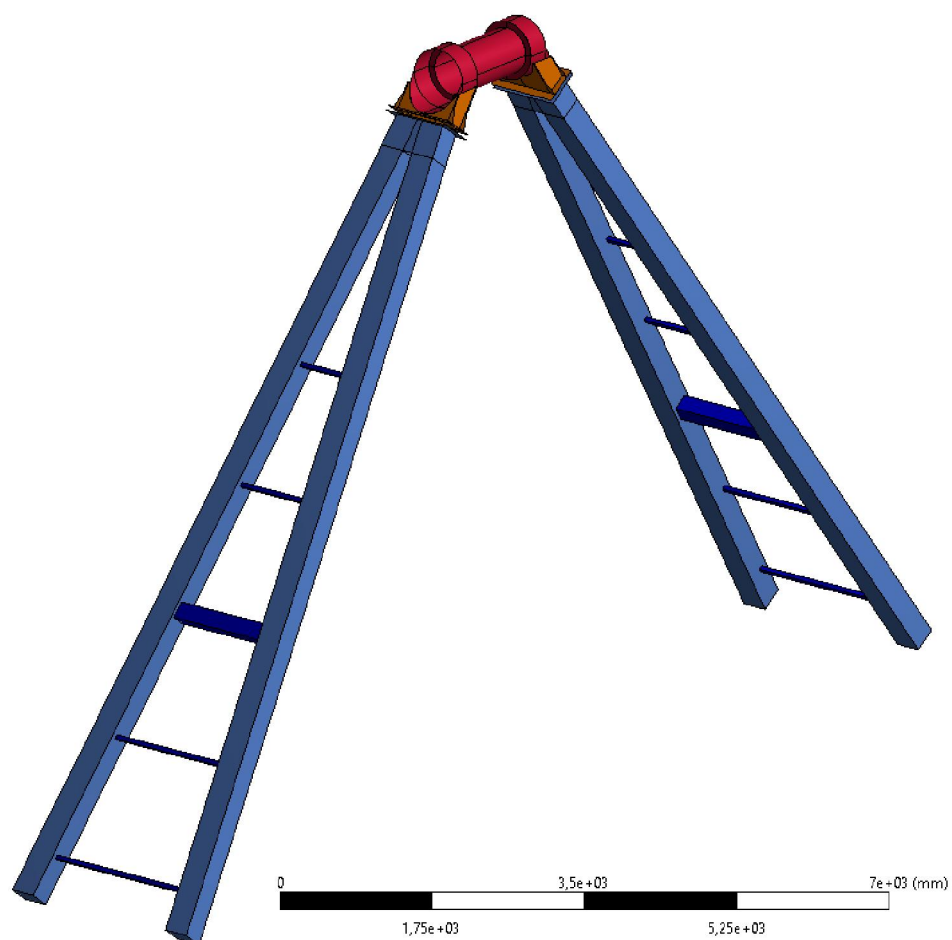
Obr. 10 – Materiálový model s bilineárním izotropním zpevněním

Každé překročení meze kluzu je samozřejmě pro nosnou konstrukci nepřijatelné, jelikož není splněna podmínka pevnosti.

6.3 Geometrický model

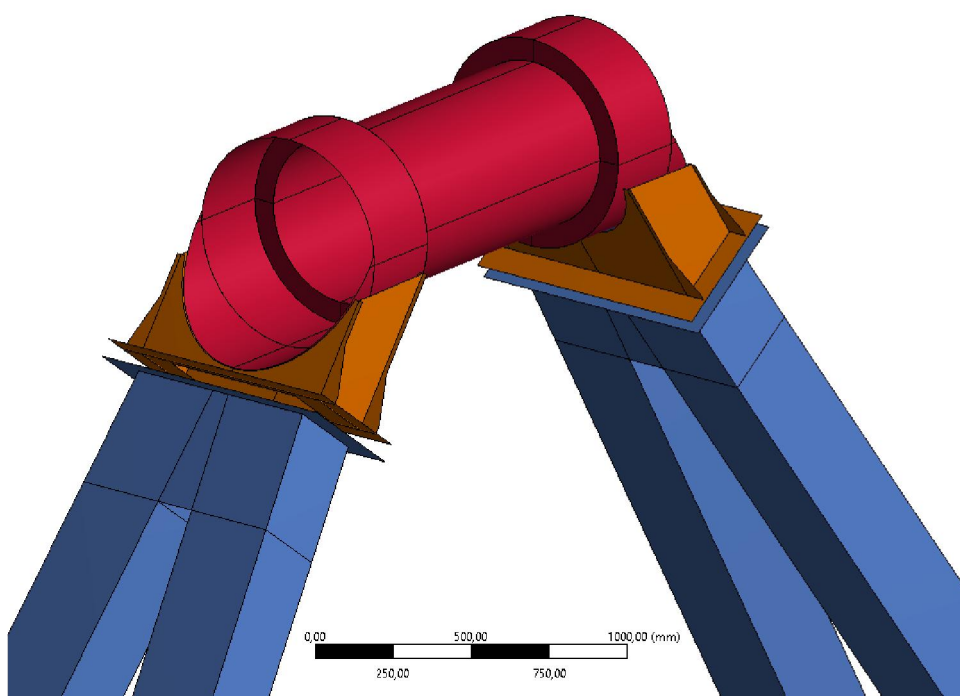
Geometrický model nosné konstrukce byl vytvořen v prostředí DesignModeler pomocí tenkých plechů, kterým je následně přiřazena tloušťka a materiál. Jelikož je model vytvořen pouze z ploch, není možné, aby na všech místech navazoval. Toto je způsobeno tím, že ve skutečnosti mají plochy tloušťku a tento problém bude u výpočtového modelu vyřešen pomocí kontaktů.

Model je zobrazen na obrázku 10 a skládá se z válcové hlavice (na obrázku zobrazena červeně), jejíž osa je totožná s osou kývání závěsu. V jejím středu je užší část, na které je uložen samotný závěs. Hlavice je pomocí svaru napojena na držáky hlavice (na obrázku oranžově), které jsou následně pomocí obdélníkových přírub spojeny se čtyřnožkou (na obrázku bledě modře). Ke zlepšení stability a pevnosti konstrukce je pak na obou stranách čtyřnožky použito 5 příček (na obrázku tmavě modře), kde v pořadí třetí příčka je širší než ostatní.



Obr. 11 – Geometrický model nosné konstrukce

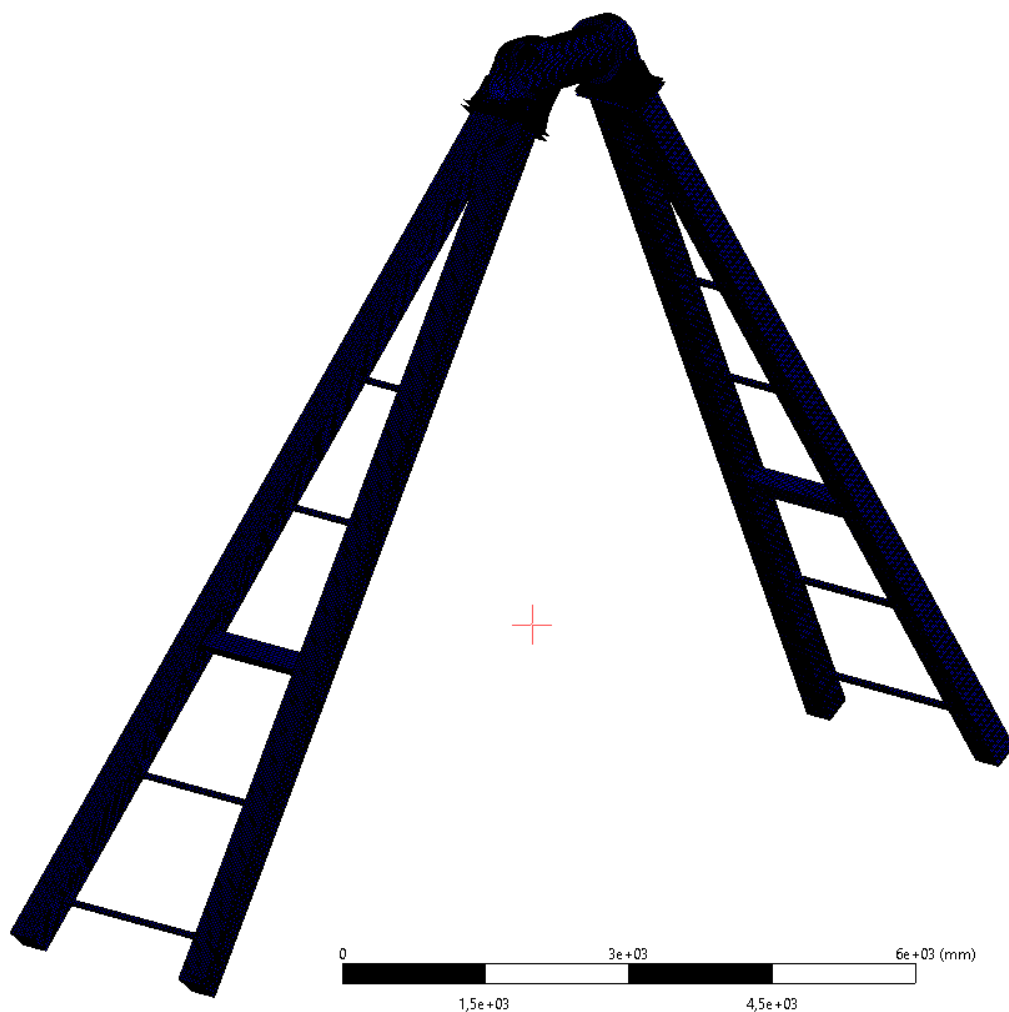
Na obrázku 11 je následně detail zaměřený na hlavici a držáky hlavice.



Obr. 12 – Detail hlavice a držáků hlavice

6.4 Výpočtový model

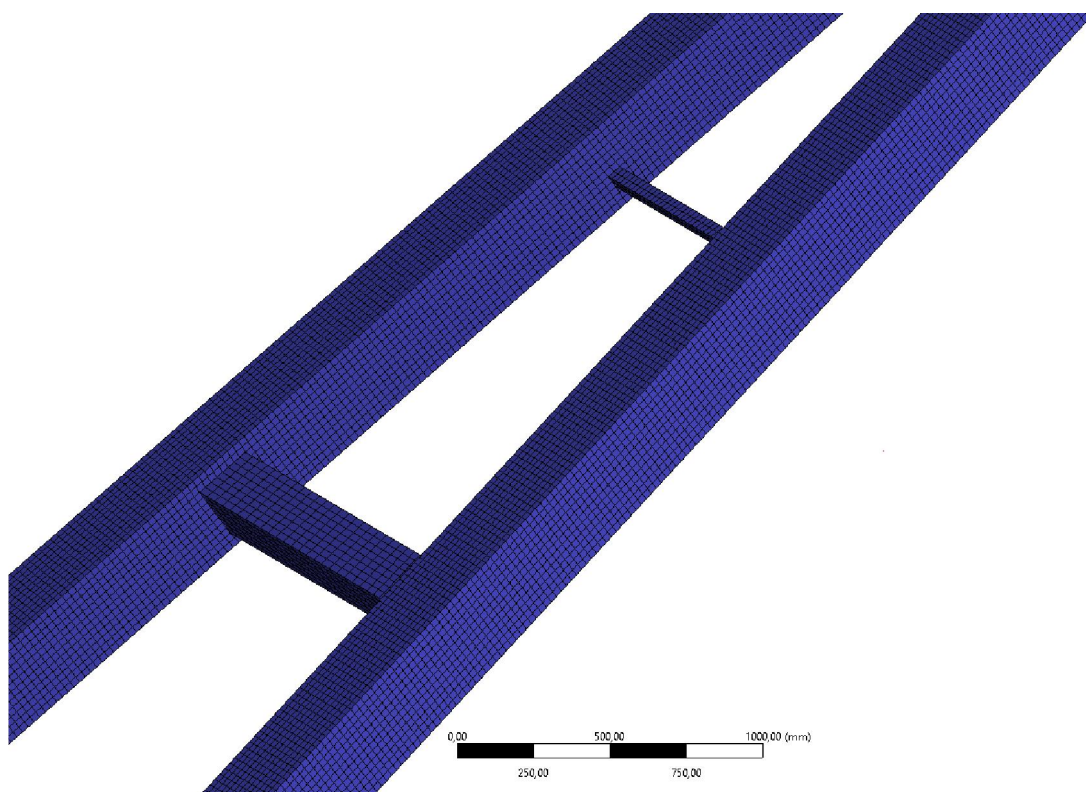
Po vytvoření geometrie je na řadě její vysítování (meshing). K tomu bylo použito na všech částech 2D skořepinových (shell) elementů tvořící téměř výhradně čtyřúhelníky, ve většině případů čtverce či obdélníky. Celkově je síť tvořena 97647 prvky a 97906 uzly. Vizualizace celé sítě je zobrazena na obrázku 12, nicméně kvůli relativně malé velikosti elementů není tak názorná jako pozdější detailní obrázky.



Obr. 13 – Výpočtový model nosné konstrukce

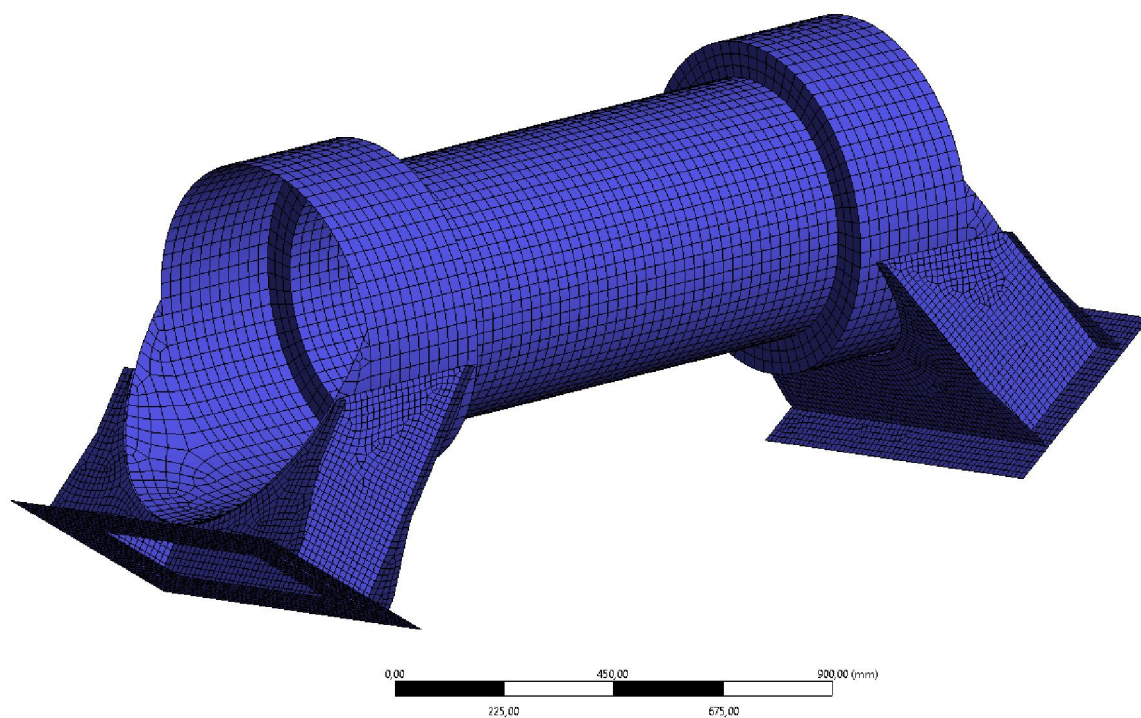
U hlavice, čtyřnožky a příček byla použita velikost elementů 25 mm. U držáků hlavice bylo přistoupeno k jemnější síti o velikosti elementů 15 mm, a to z důvodu jejich méně pravidelného tvaru.

Detail sítě na části čtyřnožky s příkladem dvou příček je zobrazen na obrázku 14. Většina ploch je vysítována pomocí rovnoběžníků. Celkově se model čtyřnožky skládá z 84584 elementů a 84453 uzlů, a to kvůli značné velikosti této konstrukce.



Obr. 14 – Detail sítě čtyřnožky a příček

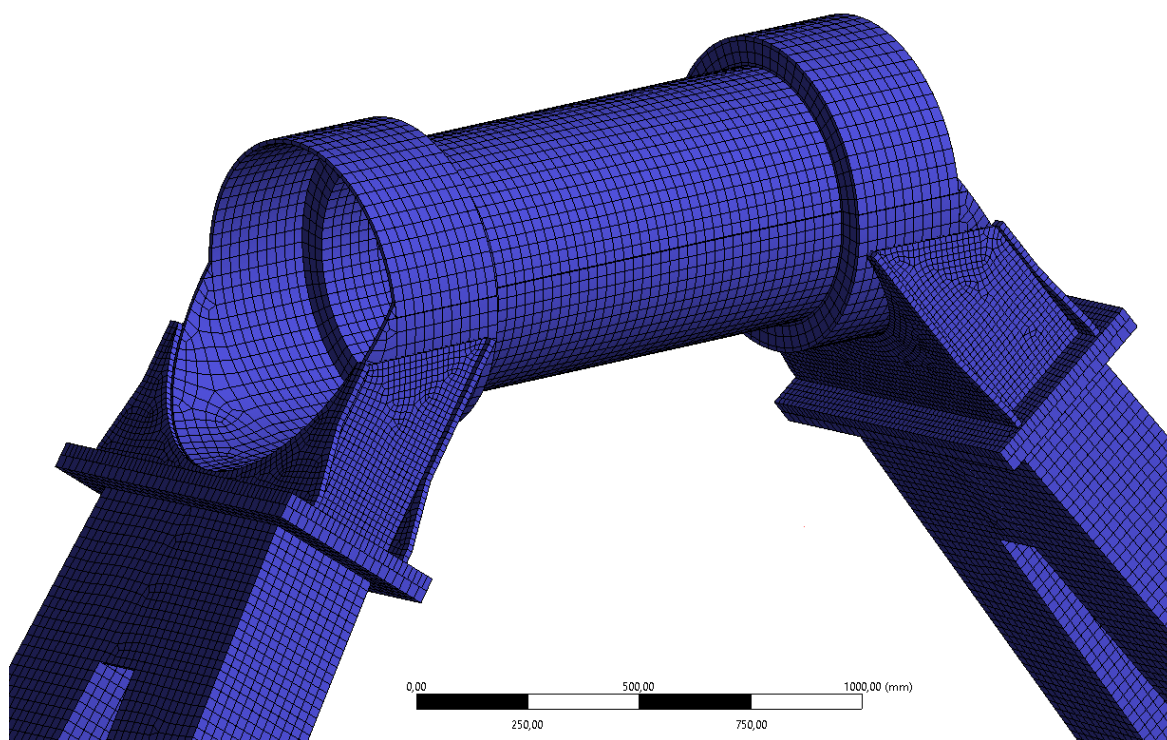
Výpočtový model hlavice je na obrázku 15 společně s držáky hlavice. Kromě jejích prodloužených spodních částí, uložených v držácích hlavice, je i zde síť pravidelná a tvořena 5185 elementy a 5268 uzly.



Obr. 15 – Detail sítě hlavice a držáků hlavice

Držáky hlavice mají síť kvůli tvaru nejméně pravidelnou, což by mohlo lehce narušovat přesnost výsledků. Jelikož byly použity menší elementy, obsahují jich držáky dohromady 7877 a uzlů je potom 8185.

Jelikož je model vytvořen pomocí ploch, mezi některými částmi modelu vznikla vizuálně mezera. Při zobrazení tloušťky shell elementů („Thick Shells and Beams“) se tyto mezery zaplní, jak je vidět z obrázku 16, nicméně výpočetní software potřebuje spojení těchto ploch pomocí kontaktů, konkrétně pevného „Bonded Contact“. Tyto byly uplatněny mezi obdélníkovými přírubami čtyřnožky a držáky hlavice a taktéž při uchycení hlavice do držáků.



Obr. 16 – Detail sítě při zobrazení tloušťky shell elementů

6.5 Svislá poloha závěsu

Doposud bylo vytvoření modelu shodné pro jakoukoliv okamžitou polohu závěsu. Nyní je nutné se zaměřit na ty polohy závěsu, ve kterých by mohla nastat maxima zatížení nosné konstrukce, resp. největší napětí a deformace.

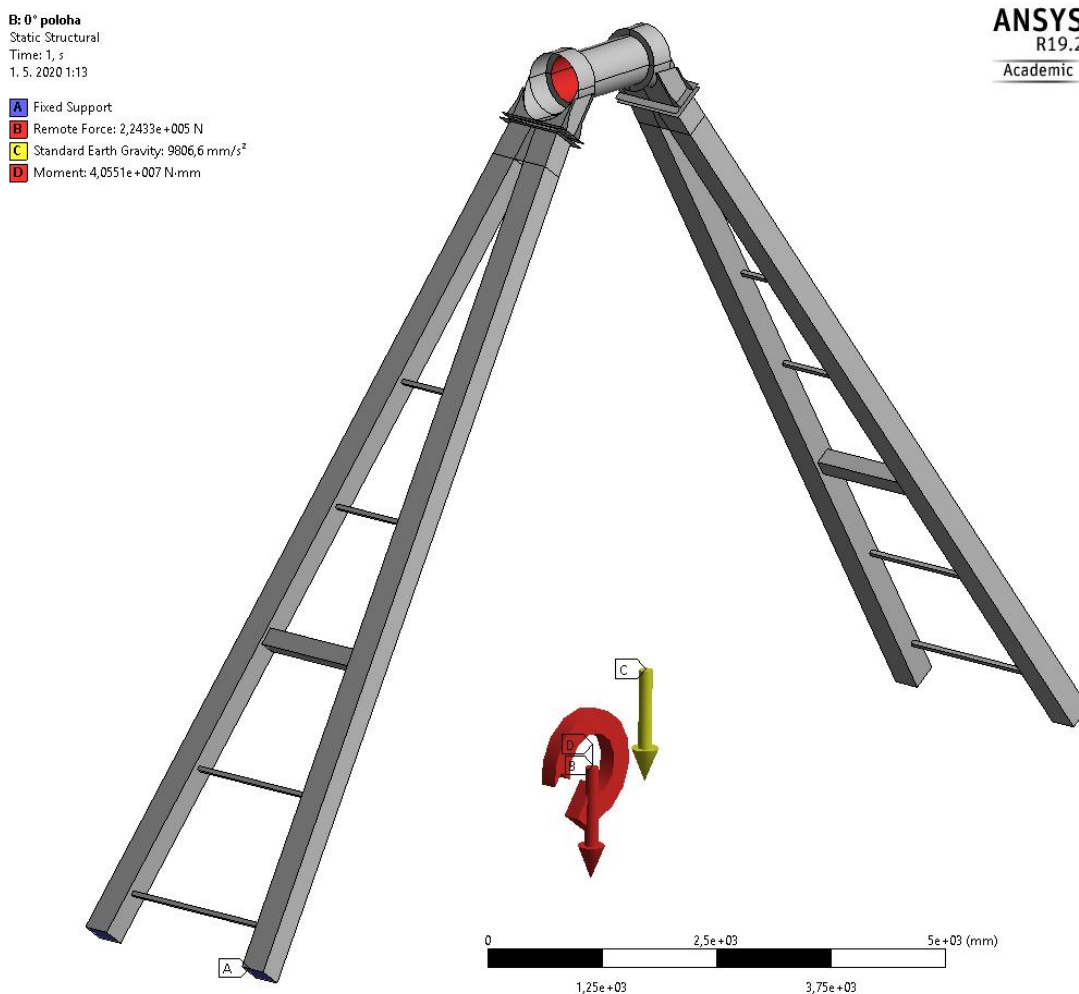
Prvním takovým případem je svislá poloha závěsu, tedy při úhlu precese $\psi = 0^\circ$. V této poloze je maximální úhlová rychlost závěsu a nulové úhlové zrychlení. Z toho plynou maximální hodnoty (dle tabulky 4) osově síly F_o ve směru osy závěsu (odstředivá setrvačná síla D_{ζ_2} a celá tíhová síla G_c působí ve stejném směru, a tedy se sčítají) a zároveň gyroskopického momentu $M_{D_{\xi_2}}$.

Hodnoty kinematických veličin a setrvačných účinků ve svislé poloze závěsu jsou uvedeny v tabulce 8.

úhel precese (výkyvu) ψ	0 °
úhlová rychlost precese (kývání) ω_ψ	1,619 s ⁻¹
úhlové zrychlení precese (kývání) ε_ψ	0 s ⁻²
obvodová rychlost těžiště závěsu $v_{T\xi_2}$	12,871 m·s ⁻¹
okamžité tečné zrychlení těžiště závěsu $a_{T\xi_2}$	0 m·s ⁻²
okamžité odstředivé zrychlení těžiště závěsu $a_{T\xi_2}$	-20,837 m·s ⁻²
příčná síla ve směru tečného zrychlení F_p	0 N
osová síla ve směru odstředivého zrychlení F_o	224334 N
gyroskopický moment $M_{D\xi_2}$	-40551 N·m

Tab. 8 – Kinematické parametry a setrvačné účinky ve svislé poloze závěsu

Okrajové podmínky včetně zatížení nosné konstrukce se svislou polohou závěsu jsou zobrazeny na obrázku 17.



Obr. 17 – Zatížení a okrajové podmínky konstrukce, svislá poloha závěsu

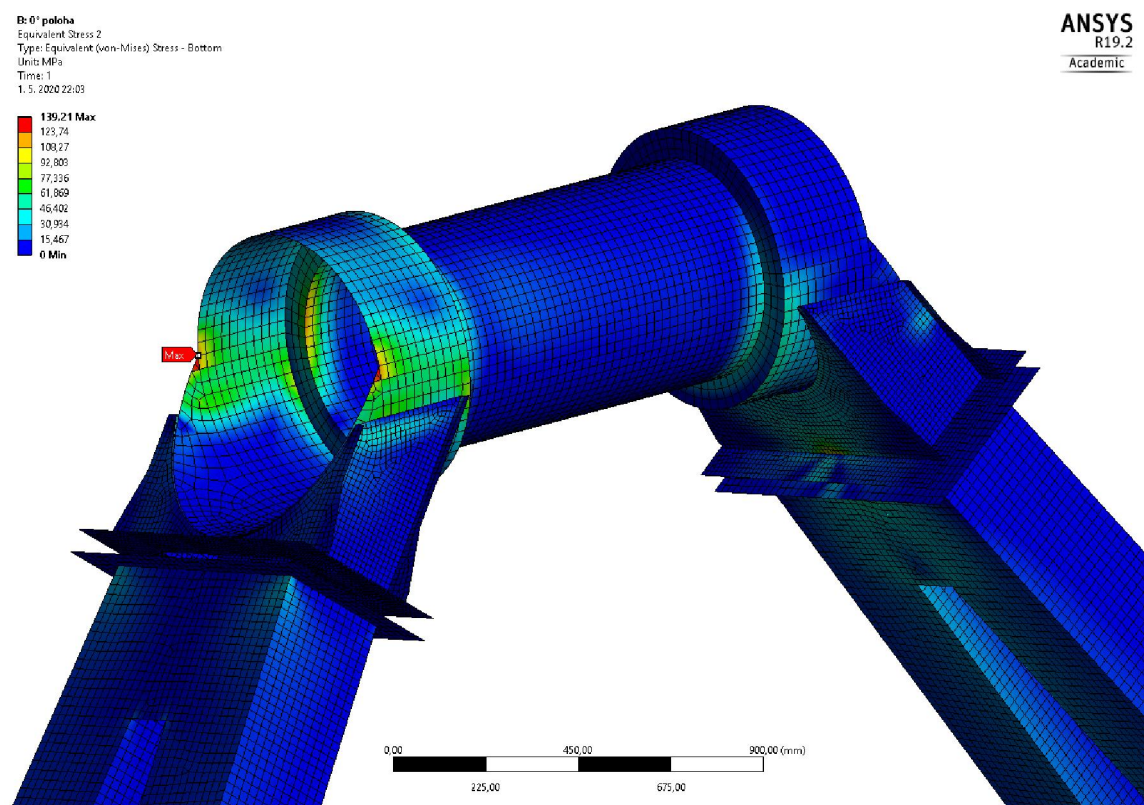
Setrvačné účinky a tíhová síla byly zavedeny na Remote Point, který je spojen se střední částí hlavice a umístěn do okamžité polohy těžiště závěsu v jeho svislé poloze. Dále je na nosnou konstrukci zavedena gravitace, která představuje zatížení vlastní tíhou konstrukce.

Okrajové podmínky byly zajištěny pomocí pevné podpory (Fixed Support) na všech spodních koncích čtyřnožky. Toto absolutně tuhé uchycení nosné konstrukce není úplně přesné, protože zanedbává poddajnost podvozku, na kterém je konstrukce uložena. Podvozek je však pevně uchycen k zemi, a proto je možné si toto zjednodušení dovolit.

6.5.1 Napětí při svislé poloze závěsu

K posouzení toho, zdali je daná nosná konstrukce vyhovující a nebudou na ni vznikat plastické deformace, bude použito redukované HMH (von Mises) napětí. Dovolené hodnoty napětí jsou brány z meze kluzu, a tedy platí pro jednoosou napjatost. U reálných součástí a zatížení dochází málokdy k napjatosti jednoosé, zpravidla se jedná o napjatost obecnou, kterou musíme s dovolenou hodnotou nějakým způsobem porovnat.

K tomuto slouží tzv. hypotézy pevnosti, mezi něž patří i výše zmíněná hypotéza HMH, která se řadí mezi energetické metody. Podle ní rozhoduje o napjatosti hustota deformační energie na změnu tvaru. V praxi se používá nejčastěji.

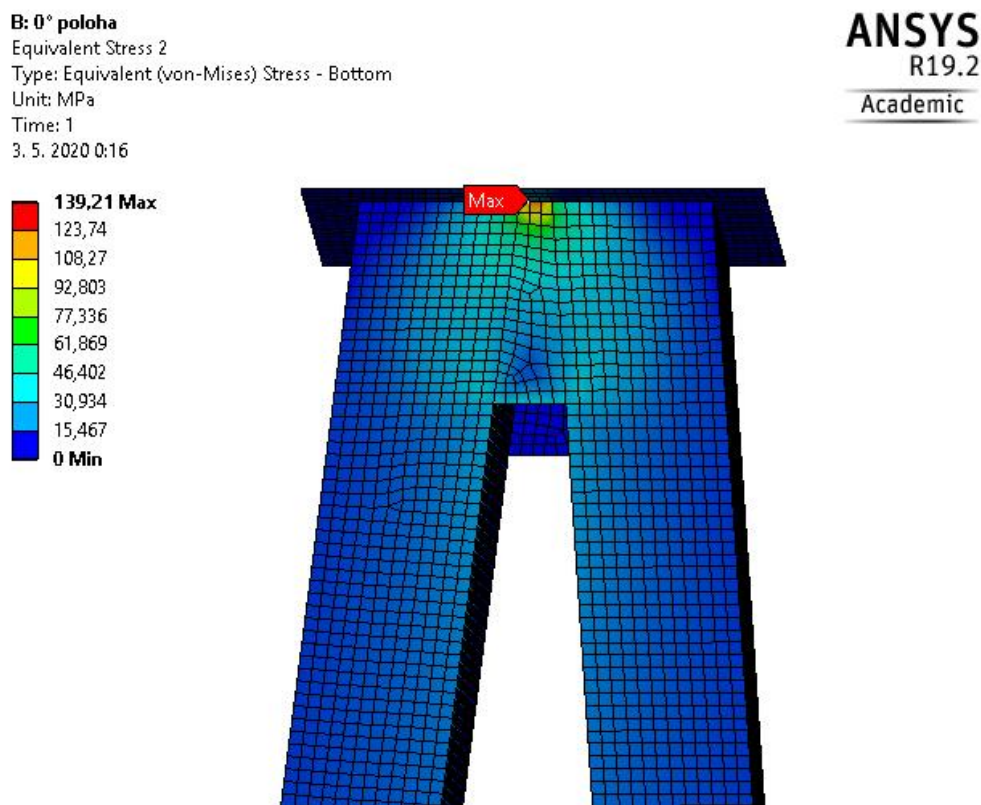


Obr. 18 – Maximální napětí HMH ve svislé poloze závěsu

Na obrázku 18 je vykresleno rozdělení napětí na vrchní části nosné konstrukce. Maximum $\sigma_{0^\circ max}$ o velikosti 139,2 MPa se nachází v přechodech na šikmé části pláště hlavice. To se nachází výrazně pod mezí kluzu, a proto nepředstavuje nebezpečí.

$$\sigma_{0^\circ max} \leq R_e \leftrightarrow 139,2 \text{ MPa} \leq 355 \text{ MPa} \quad (6.2)$$

Co se týče spodní části nosné konstrukce tedy čtyřnožky, maximální napětí je o něco nižší – 121,6 MPa, nachází ve střední části čtyřnožky (na vnitřní straně konstrukce) těsně pod přírubou.



Obr. 19 – Napětí HMM na čtyřnožce ve svislé poloze závěsu

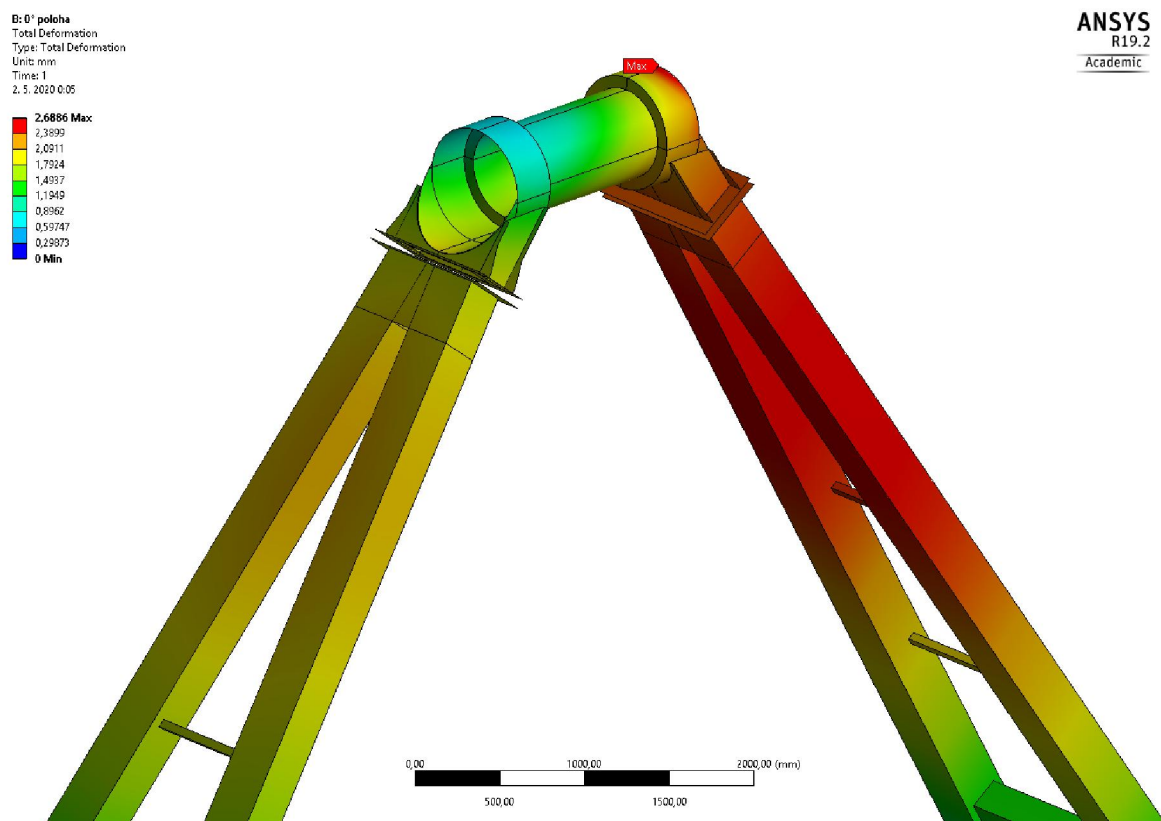
Může se tedy určit součinitel bezpečnosti k při tomto zatížení, což je poměr meze kluzu k maximálnímu napětí:

$$k = \frac{R_e}{\sigma_{0^\circ max}} = 2,55 \quad (6.3)$$

což je více než dostatečné.

6.5.2 Deformace při svislé poloze závěsu

Deformace udává, jak moc se konstrukce pod zatížením prohne. Při svislé poloze závěsu je maximální celková deformace 2,7 mm, což je vzhledem k rozměrům konstrukce velmi nízká hodnota.



Obr. 20 – Celková deformace nosné konstrukce při svislé poloze závěsu

Tato celková deformace je složena zejména z deformací ve svislém směru (v důsledku tíhy konstrukce i závěsu a odstředivou silou) a ve směru osy kývání závěsu (způsobeno gyroskopickým momentem).

6.6 Vodorovná poloha závěsu

Druhou kritickou polohou je vodorovná poloha závěsu, tedy při úhlu precese $\psi = 90^\circ$. Zde jsou nenulové hodnoty úhlové rychlosti i úhlového zrychlení. Není zde žádná síla ani moment maximální, nicméně kvůli poloze působišť těchto účinků se mohou ve výsledku projevit ve větším měřítku.

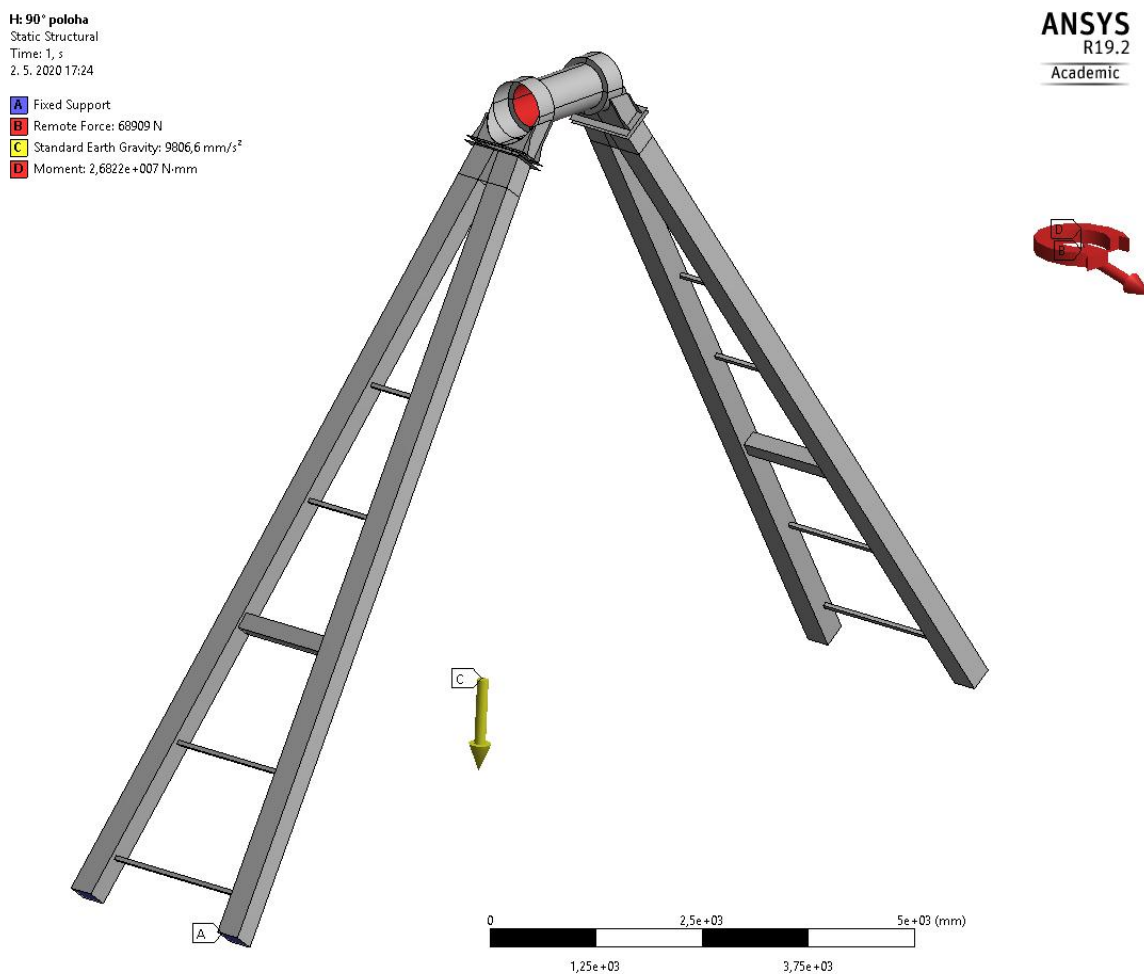
Tečná setrvačná síla D_{ξ_2} a tíhová síla G_c působí na stejné nositelce, ale v opačných směrech, proto se jejich hodnoty odečítají a výsledná příčná síla F_p je tak nižší. Odstředivá síla D_{ζ_2} tvoří nyní celou hodnotu osově síly F_o .

Hodnoty kinematických veličin a setrvačných účinků ve vodorovné poloze závěsu jsou uvedeny v tabulce 9.

úhel precese (výkyvu) ψ	90 °
úhlová rychlost precese (kývání) ω_ψ	1,071 s ⁻¹
úhlové zrychlení precese (kývání) ε_ψ	-0,938 s ⁻²
obvodová rychlost těžiště závěsu $v_{T\xi_2}$	8,514 m·s ⁻¹
okamžité tečné zrychlení těžiště závěsu $a_{T\xi_2}$	-7,462 m·s ⁻²
okamžité odstředivé zrychlení těžiště závěsu $a_{T\zeta_2}$	-9,116 m·s ⁻²
příčná síla ve směru tečného zrychlení F_p	17190 N
osová síla ve směru odstředivého zrychlení F_o	66730 N
gyroskopický moment $M_{D\xi_2}$	-26822 N·m

Tab. 9 – Kinematické parametry a setrvačné účinky ve vodorovné poloze závěsu

Obrázek 21 ukazuje okrajové podmínky a zatížení výpočtového modelu pro vodorovnou polohu závěsu.

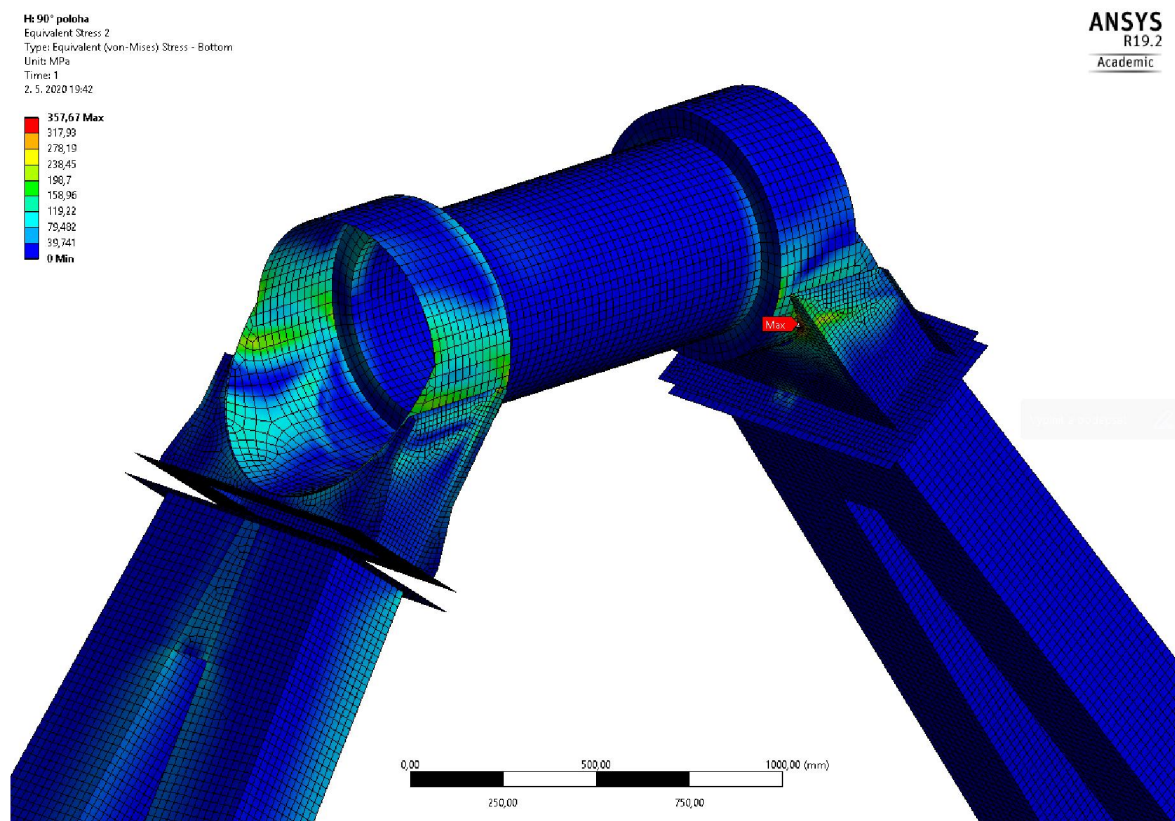


Obr. 21 – Zatížení a okrajové podmínky konstrukce, vodorovná poloha závěsu

Remote Point byl přesunut do vodorovné polohy těžiště závěsu a bylo na něj zavedeno zatížení patřící této poloze. Vlastní tíha nosné konstrukce a pevná podpora zůstaly ve stejné podobě jako v předchozí poloze závěsu.

6.6.1 Napětí při vodorovné poloze závěsu

Při této poloze vzniká značné napětí na nosné konstrukci, jak je zřejmé z obrázku 22. Byla překročena mez kluzu a došlo k lokálnímu zplastizování v těchto místech, což snížilo celkové HMH napětí.

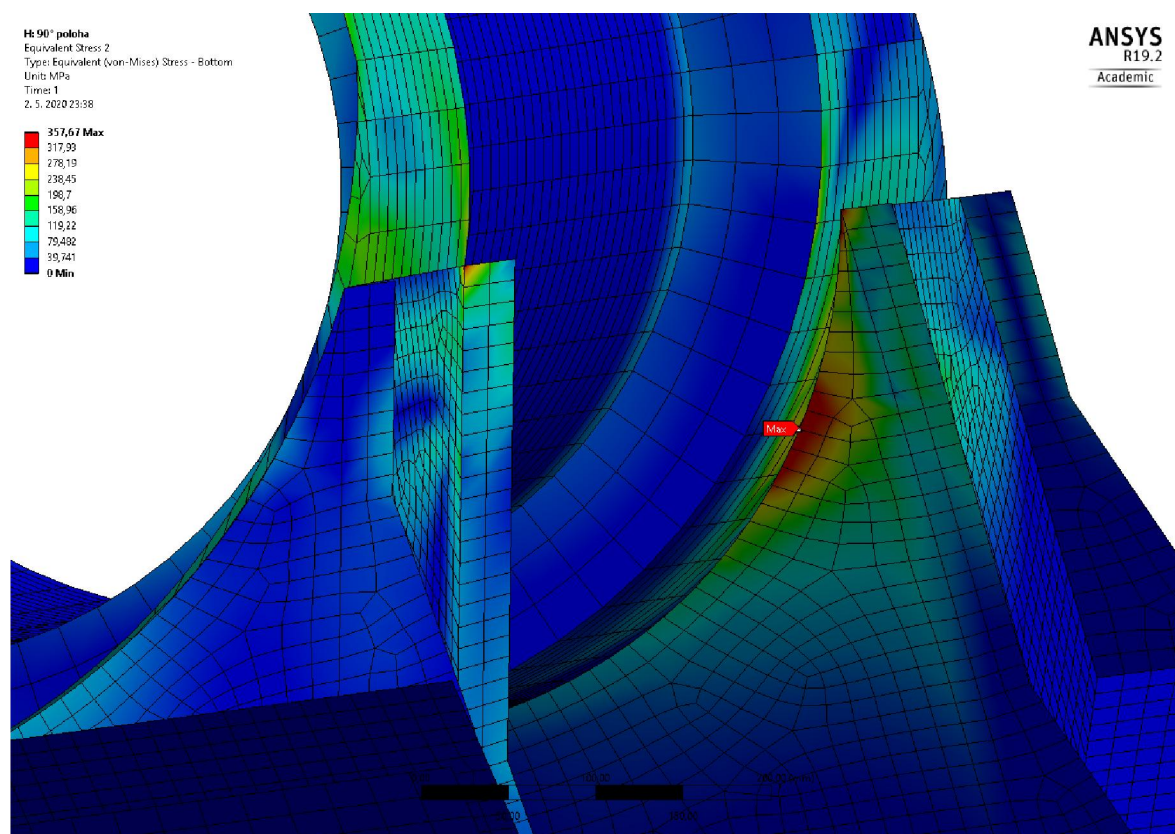


Obr. 22 – Maximální napětí HMH ve vodorovné poloze závěsu

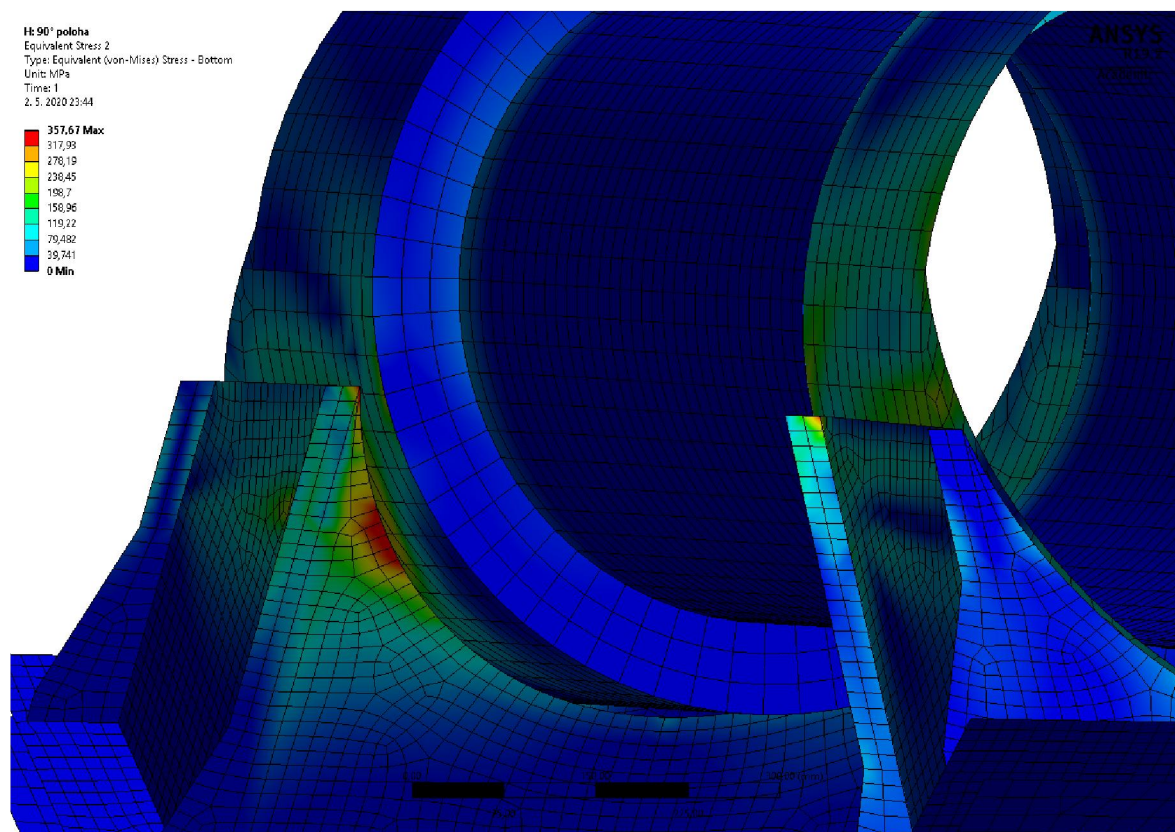
Maximum $\sigma_{90^\circ max}$ o velikosti 357,7 MPa se nachází na vnitřní stěně jednoho z držáků hlavy a překračuje mez kluzu. Pevnostní podmínka tedy není splněna.

$$\sigma_{90^\circ max} > R_e \leftrightarrow 357,7 \text{ MPa} > 355 \text{ MPa} \quad (6.4)$$

Mez kluzu je přitom překročena na více místech, jak je vidět z obrázků níže. Jedná se o oba oblouky na výše zmíněné vnitřní stěně držáku hlavy, a také v jeho rozích s bočními stěnami. Na protilehlém držáku hlavy se také napětí přibližuje mezi kluzu, napětí zde dosahuje 344 MPa (na obrázcích 23 a 24 přední držák).



Obr. 23 – Detail rozložení napětí HMH na vnitřní stěně držáku hlavice



Obr. 24 – Detail rozložení napětí HMH na vnitřní stěně držáku hlavice

Na čtyřnožce je maximální napětí opět nižší – 150,5 MPa. Znovu je k nalezení těsně pod přírubou, nicméně oproti minulému případu ne na středu, ale v rozích. Toto napětí nepřekračuje mez kluzu, problém tedy nastává pouze u držáků hlavice.

H: 90° poloha

Equivalent Stress 3

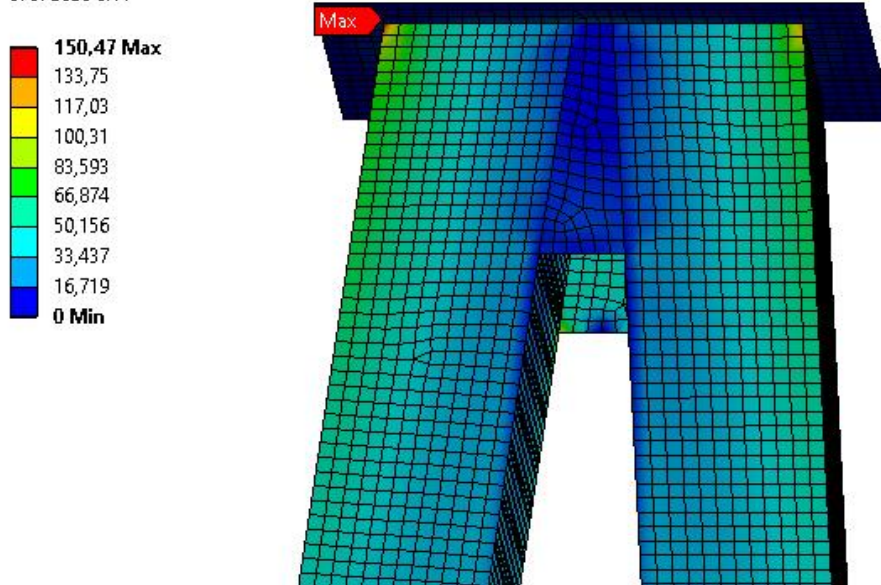
Type: Equivalent (von-Mises) Stress - Top/Bottom

Unit: MPa

Time: 1

3. 5. 2020 0:11

ANSYS
R19.2
Academic



Obr. 25 – Napětí HMH na čtyřnožce ve vodorovné poloze závěsu

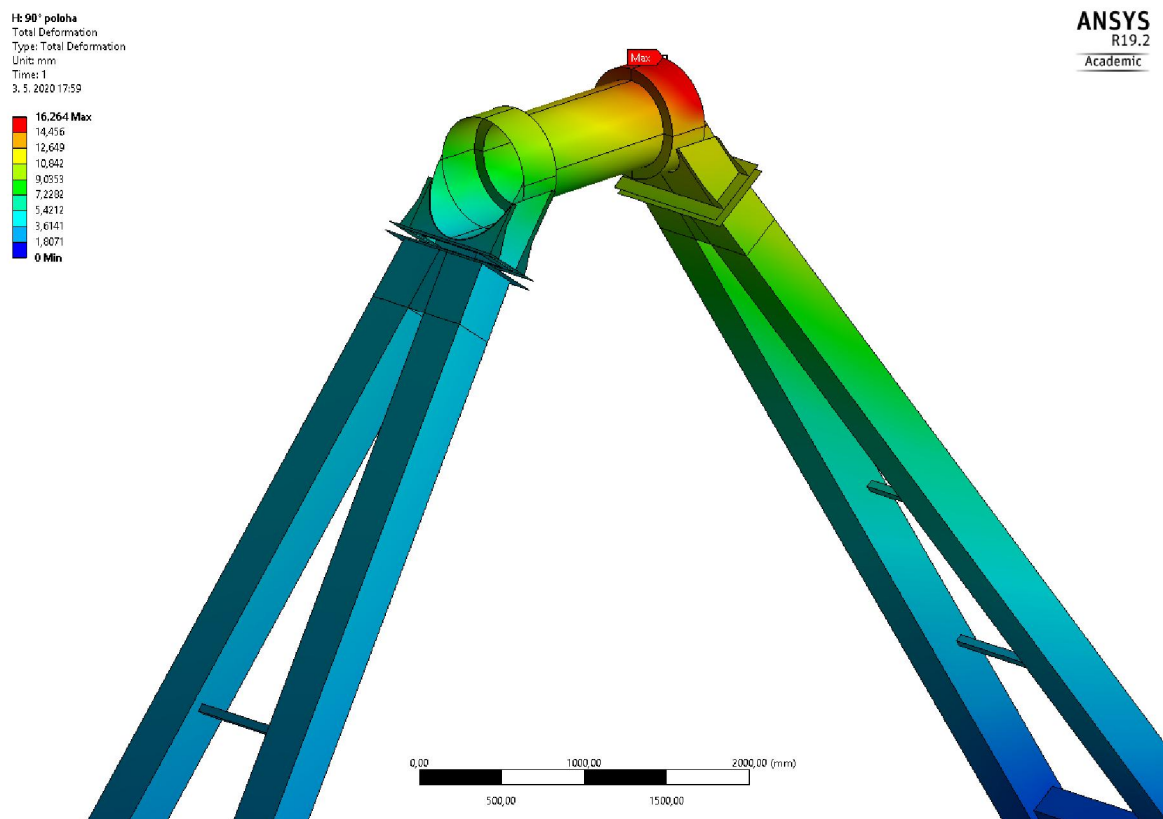
Jelikož je překročena mez kluzu, součinitel bezpečnosti $k < 1$ a nemá ho tedy smysl počítat. Jedná se sice o relativně malé oblasti, ale i přesto nosná konstrukce nevyhovuje danému zatížení.

Aby mohla jít do provozu, muselo by se přistoupit k její úpravě (tloušťka plechů, přidat žebra, vymyslet jiný způsob uchycení hlavice, a podobně), popř. nahradit materiál kvalitnější ocelí, což by ale mělo za následek vyšší cenu.

Další možností je úprava kinematických parametrů (nižší úhlová rychlost kývání, menší amplituda výkmitu atd.), čímž by došlo ke snížení velikosti setrvačných účinků. To by ale mohlo vést k nižšímu účinku samotné atrakce na osoby v sedačkách.

6.6.2 Deformace při vodorovné poloze závěsu

U vodorovné polohy závěsu nabývá maximální celková deformace hodnoty 16,3 mm. Maximum se opět nachází na spodní části pláště hlavice, deformuje se však výrazně více než v předchozím případě. Jelikož je již známo, že konstrukce v této pozici závěsu nevyhovuje, je zřejmé, že i deformace může být vyšší než bezpečná.



Obr. 26 – Celková deformace nosné konstrukce při vodorovné poloze závěsu

Tato celková deformace je naopak nejvíce zastoupena posuvem ve vodorovné osy kolmé k ose kývání závěsu. Složky posuvů ve zbylých dvou směrech jsou podobné velikosti jako u případu svislé polohy závěsu.

Vyhodnocení a závěr

Předmětem této diplomové práce byl rozbor kinematiky a dynamiky sférického pohybu u zábavní atrakce Extreme a následná pevnostní kontrola její nosné konstrukce v komerčním výpočetním software Ansys Workbench 19.2. Na úvod práce je krátce popsána daná problematika a vytyčeny hlavní cíle práce.

Druhá kapitola se zabývá teorií týkající se kinematiky a dynamiky sférického pohybu. Jsou zde zavedeny pojmy jako pevný a tělesový souřadný systém a jejich transformace pomocí Eulerových úhlů. Pokud je znám průběh tří rotací, které tvoří sférický pohyb, lze dojít k Eulerovým kinematickým rovnicím. Dynamika sférického pohybu je určena pomocí setrvačných účinků vycházejících z hybnosti, resp. momentu hybnosti. Z tohoto se poté vychází při tvorbě Eulerových pohybových rovnic.

Ve třetí kapitole jsou vypsány délkové a hmotové parametry, které jsou zapotřebí ke kinematické a dynamické analýze, včetně dopočtu některých parametrů jako vzdálenost těžiště závěsu a celkových momentů setrvačnosti, které jsou stěžejní pro určení setrvačných účinků a jejich působíště.

Následující kapitola se již zabývá samotným kinematickým rozбором předmětného sférického pohybu. Jedná se o dvě rotace – precesi a vlastní rotaci, nutaci soustava nevykonává. Dochází zde k definování těchto rotací a následnému dosazení do Eulerových kinematických rovnic. Výstupem pak jsou průběhy úhlových rychlostí, úhlových zrychlení, obvodových rychlostí a okamžitého zrychlení v závislosti na úhlu precese (kývání).

Kinematické parametry jsou poté použity jako vstup do dynamické analýzy, kde jsou určeny složky setrvačné síly a setrvačného momentu, tedy opět jejich průběhy v závislosti na poloze závěsu s přihlédnutím na tíhovou sílu působící na závěs. Druhou částí je určení těchto setrvačných účinků pro rotor závěsu, kde je výstup analogický.

Závěrečná kapitola je zaměřena na pevnostní kontrolu nosné konstrukce. Nejprve je zde popsána numerická metoda konečných prvků a pravidla pro tvorbu sítě. Dále je představen použitý materiál a geometrický model a jeho převod pomocí metody konečných prvků na diskretní výpočtový model. Jsou přitom vybrány dvě kritické polohy závěsu, a to svislá a vodorovná, k těmto polohám jsou popsány okrajové podmínky a zatížení nosné konstrukce.

Poté už může proběhnout samotný výpočet, jehož výsledkem je rozložení redukovaného napětí HMH, které při svislé poloze závěsu dosahuje maxima 139,2 MPa. Toto napětí

pro konstrukci nepředstavuje žádné nebezpečí. Maximální celková deformace je v tomto případě 2,7 mm, což je také velmi malá hodnota.

Problém však nastává u vodorovné polohy závěsu, kde je maximální hodnota napětí 357,7 MPa a je tedy překročena mez kluzu. Dochází zde k plastickým deformacím, což je pro konstrukci nepřijatelné. Maximální celková deformace je také vyšší, a to 16,3 mm.

Závěrem tedy je, že atrakce v tomto stavu nemůže být uvedena do provozu. Je nutné přikročit k úpravám, a to buď konstrukce (tloušťka plechů, přidat žebra, vymyslet jiný způsob uchycení hlavice, a podobně), nebo materiálu, popř. kinematických parametrů (pomalejší kývání, menší amplituda výkmitu).

Poděkování

Rád bych touto cestou vyjádřil poděkování doc. Ing. Jiřímu Podešvovi, Ph.D. za jeho cenné rady, vstřícnost a trpělivost při vedení mé diplomové práce.

Seznam zdrojů

- [1] BRÁT, Vladimír, JÁČ Václav a ROSENBERG Josef. *Kinematika*. Praha: SNTL, 1987.
- [2] BROUSIL, Jaromír, SLAVÍK Jaromír a ZEMAN, Vladimír. *Dynamika*. Praha: SNTL, 1989. ISBN 80-03-00164-1.
- [3] JULIŠ, Karel a BREPTA Rudolf. *Mechanika II. díl, Dynamika*. Praha: SNTL, 1987.
- [4] PODEŠVA, Jiří. *Zábavní atrakce Extreme: technická zpráva*. Ostrava, 2015.
- [5] Extreme. *Funlight* [online]. [cit. 2020-05-03]. Dostupné z: <http://www.funlight.cz/atrakce/nove-atrakce/freak-out-extreme/>
- [6] Sférický pohyb. Podpůrné materiály do předmětu Dynamika II. *Katedra Aplikované mechaniky, Fakulta strojní, VŠB-TU Ostrava*.
- [7] SIKORA, Roman. Dynamika: Kinematika a dynamika prostorových pohybů. *Modernizace výukových materiálů a didaktických metod. Fakulta strojní, VŠB-TU Ostrava* [online]. Ostrava, 2013 [cit. 2020-05-03]. Dostupné z: http://projekty.fs.vsb.cz/463/edubase/VY_01_029/Dynamika.pdf
- [8] LANGER, Jiří a PODOLSKÝ, Jiří. Teoretická mechanika. *Ústav teoretické fyziky, Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova v Praze* [online]. Praha, 2015 [cit. 2020-05-03]. Dostupné z: <http://utf.mff.cuni.cz/vyuka/OFY003/TEXTY/tuhetele.pdf>
- [9] VYBÍRAL, Bohumil. Setrvačníky a jejich aplikace. *Knihovna Fyzikální olympiády Jihomoravského kraje*. [online]. [cit. 2020-05-03]. Dostupné z: https://www.jaroska.cz/fo/_media/archiv/knihovna/setrv_booklet.pdf
- [10] Rotační a sférický pohyb. *Mechanika 3. Katedra Mechaniky, Západočeská univerzita v Plzni* [online]. Plzeň [cit. 2020-05-03]. Dostupné z: <https://www.kme.zcu.cz/byrtus/MECH3K.php>
- [11] VRBKA, Martin a VAVERKA, Michal. Metoda konečných prvků: 1. přednáška – úvod. *Ústav konstruování* [online]. [cit. 2020-05-03]. Dostupné z: http://www.shigley.cz/images/texts/file/prednaska1_mkp.pdf
- [12] FEA Element types. *DeepSoft, LLC* [online]. [cit. 2020-05-03]. Dostupné z: http://fea-cae-engineering.com/fea-cae-engineering/element_types.htm
- [13] FEM Mesh. *FreeCAD Wiki* [online]. [cit. 2020-05-03]. Dostupné z: https://wiki.freecadweb.org/FEM_Mesh
- [14] Finite Element Mesh Refinement. *Multiphysics Cyclopedia. Comsol* [online]. [cit. 2020-05-03]. Dostupné z: <https://www.comsol.ch/multiphysics/mesh-refinement>
- [15] Modul pružnosti – Elastic Modulus. *Wikipedia* [online]. [cit. 2020-05-03]. Dostupné z: https://cs.qwe.wiki/wiki/Elastic_modulus

- [16] Hodnoty mezi pevnosti, kluzu, únavy a dovolených napětí pro ocel. *E-konstrukter: Portál pro strojní konstruktéry* [online]. 2013 [cit. 2020-05-03]. Dostupné z: <https://e-konstrukter.cz/prakticka-informace/hodnoty-mezi-pevnosti-kluzu-unavy-a-dovolenych-napeti-pro-ocel>
- [17] ČSN 11 523 / 1.0570 / ST52.3. *Konstrukční oceli. JKZ Bučovice, a.s.* [online]. [cit. 2020-05-03]. Dostupné z: <https://www.jkz.cz/cs/produkty/konstrukcni-oceli/csn-11-523-10570-st523/>
- [18] ČSN 11523 – konstrukční ocel. *CZ FERRO Steel* [online]. [cit. 2020-05-03]. Dostupné z: <http://www.czferrosteel.cz/pdf/tyce-11523.pdf>
- [19] EN 10025-2 S355J2G3 high strength structural steel plate. *Steelspecs. Henan Gang Iron and Steel* [online]. [cit. 2020-05-03]. Dostupné z: <http://www.steelspecs.com/EN10025-2/EN10025-2S355J2G3STEELPLATE.html>
- [20] Mezní stavy napjatosti a podmínky pevnosti. *Pružnost a pevnost. Západočeská univerzita v Plzni: katedra mechaniky* [online]. [cit. 2020-05-03]. Dostupné z: https://www.kme.zcu.cz/kmet/ppe/teorie/12_natp_02.pdf